

## Das Pizza-Problem – ein Einstieg in die Kreisberechnung

Kerstin Langer, Kiel



© Thinkstock/iStock, Choreograph

Mm, lecker!

I/D

**Klasse:** 10 (G9) / 9 (G8)

**Dauer:** 4–7 Unterrichtsstunden

**Inhalt:**

- Ein alltagsorientierter Zugang zur Kreisberechnung mit anschaulichen und handlungsorientierten Methoden
- ein Beispiel für ein mathematisches Näherungsverfahren
- Annäherung des Flächeninhalts eines Kreises mithilfe von  $n$ -Ecken: Der Kreis wird dabei in gleich große Kreisausschnitte zerlegt und neu zu einem Parallelogramm zusammengelegt, dessen Flächeninhaltsberechnung bekannt ist. Mit zunehmender Anzahl der Kreisteile wird die Fläche der überstehenden Rundungen kleiner, und der Flächeninhalt des Parallelogramms nähert sich immer mehr dem des Kreises an.

**Ihr Plus:** Binnendifferenzierung, Computerprogramm

Dieser Einstieg in die Kreisberechnung bietet einen anschaulichen Zugang zum Thema „Näherungsverfahren“. Die normalerweise eher abstrakte Betrachtungsweise solcher Verfahren wird hier durch ein Beispiel mit handlungsorientierten und schüleraktivierenden Methoden ergänzt. Die Aufgaben liegen in **unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden** vor und können so hervorragend für binnendifferenzierten Unterricht eingesetzt werden. Dabei sind sie so gestaltet, dass die Schüler auf vielen Strecken selbstständig arbeiten können. Die Aufgabenblätter bauen aufeinander auf, können aber auch unabhängig voneinander genutzt werden. Für die Phasen, in denen die Genauigkeit von Papier, Schere und Klebstoff nicht ausreichend ist, steht ein **Programm** zur Verfügung, das plattformunabhängig genutzt werden kann.

## Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 1 K 2 K 3 K 5 K 6	L 2	... nutzen das Grundprinzip des Messens, ... wählen Einheiten von Größen situationsangemessen aus, ... berechnen Flächeninhalte von zusammengesetzten Figuren,	I–III
	L 3	... erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt, ... operieren gedanklich mit Flächen, ... analysieren und klassifizieren geometrische Objekte in der Ebene, ... beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen,	
	L 4	... erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen sie dar.	

I/D

## Abkürzungen

*Kompetenzen*

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

*Leitideen*

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

*Anforderungsbereiche*

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

<b>Reihe 51</b> S 4	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

## Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
Einstieg (Fo)	<b>Pizza-Problem: Welche Pizza ist jeweils am günstigsten?</b> Farbfolie, die die einzelnen Pizzen und ihre Preise zeigt	1.
M 1	<b>Das Pizza-Problem: Welche Pizza ist jeweils am günstigsten?</b> Vorstellung der Pizzen mit ihren Preisen und Fragestellung nach der günstigsten Pizza Diese Frage trägt die gesamte hier vorgestellte Einheit.	
M 2	<b>Den Flächeninhalt einer Pizza experimentell bestimmen</b> Einschachtelung des Flächeninhalts des Kreises durch Zerlegen und erneutes Zusammenlegen zu einer Art „Parallelogramm“ Betrachtung der Flächeninhalte von äußerem und innerem Parallelogramm	2.
M 3	<b>Animierte Annäherung des Flächeninhalts einer Pizza</b> Programm zur Kreiszerlegung und zum Zusammenlegen in eine Art „Parallelogramm“ Die Flächeninhalte von innerem und äußerem Parallelogramm werden angegeben.	3.
M 4	<b>Den Flächeninhalt eines Kreises berechnen</b> Finden eines Zusammenhangs von relevanten Größen zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises	4.
M 5	<b>Die Lösung des Pizzaproblems!</b> Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises und darauf basierende Lösung des Pizzaproblems	5.

### Minimalplan

Wenn die Zeit knapp sein sollte, kann an mehreren Stellen eingespart werden:

Die Aufgaben mit dem niedrigen Schwierigkeitsgrad lenken zielgerichtet auf das Ergebnis hin und sind für viele Schüler in kürzester Zeit zu bewältigen. Beachten Sie allerdings, dass Sie Ihren Schülern damit die Möglichkeit nehmen, von selbst auf Lösungsideen zu kommen.

Das Ausschneiden und Zusammenlegen der Kreisteile sollte als **Hausaufgabe** erfolgen.

Ebenfalls können Ihre Schüler das Eintragen der Werte aus dem Programm als Hausaufgabe erledigen, wenn Sie ihnen dieses über das Internet zur Verfügung stellen. Ihre Schüler können auch nur mit dem Programm arbeiten und den „Bastelteil“ überspringen.


Das Ermitteln der Werte für die Tabellen kann arbeitsteilig erfolgen.

I/D

Reihe 51	Verlauf	Material S 2	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 1

**Pizza-Problem:  
Welche Pizza ist jeweils am günstigsten?**



**Hawaii:** Grundpizza mit Salami

Small Ø 24 cm	Medium Ø 32 cm	Extra Large Ø 38 cm	Family 35 x 55 cm
6,90 €	8,90 €	12,65 €	29,90 €



**Arizona:** Grundpizza mit Salami, Champignons und Paprika.

Small Ø 24 cm	Medium Ø 32 cm	Extra Large Ø 38 cm	Family 35 x 55 cm
8,05 €	11,20 €	16,10 €	35,50 €



**El Paso:** Grundpizza „Surprise für Kinder“

Small Ø 24 cm	Medium Ø 32 cm	Extra Large Ø 38 cm	Family 35 x 55 cm
8,25 €	10,50 €	14,60 €	32,90 €



**Valdivia:** Grundpizza mit Zucchini, Möhren und anderem Gemüse

Small Ø 24 cm	Medium Ø 32 cm	Extra Large Ø 38 cm	Family 35 x 55 cm
9,45 €	12,05 €	16,85 €	36,80 €

**Aufgabe 1**

Wähle den für dich passenden Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung und klebe sie hier auf.

**Aufgabe 2**

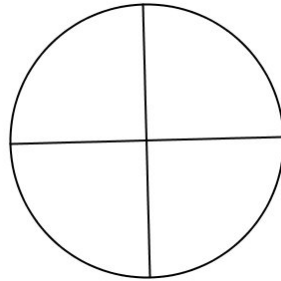
Wähle den für dich passenden Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung und klebe sie hier auf.

I/D

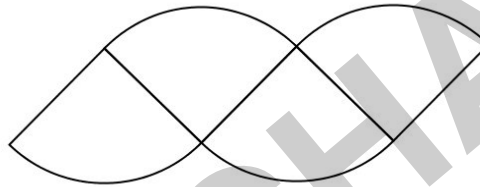
**Aufgabe**

Schwierigkeitsgrad: ☆☆☆

- Zeichne einen Kreis mit  $d = 10$  cm und schneide ihn aus.
- Schneide den Kreis so in vier gleich große Teile:



- Lege die vier Kreisteile so, wie hier abgebildet, zusammen:



- Zeichne ein **inneres** und ein **äußeres Parallelogramm** ein, mit dem du diese Figur einschachteln kannst. Miss die entsprechenden Längen und berechne die beiden Flächeninhalte. Der Flächeninhalt des Kreises liegt **zwischen** diesen beiden Werten.
- Teile den Kreis nun in acht gleich große Teile, indem du einfach diese vier Teile halbiert. Lege sie erneut zu einer Art Parallelogramm zusammen. Berechne die beiden Flächeninhalte.
- Verfahre ebenso mit einer Zerlegung in 16 Kreisteile. Klebe die 16 Teile auf.

**Aufgabe**

Schwierigkeitsgrad: ☆☆☆

- Zeichne einen Kreis mit  $d = 10$  cm und schneide ihn aus.
- Schneide den Kreis in vier gleich große Teile und lege die vier Kreisteile zu einer neuen Figur zusammen. Zeichne eine Figur innerhalb und eine außerhalb dieser neuen Figur ein, von der du den Flächeninhalt einfach berechnen kannst. Damit soll der Flächeninhalt des Kreises eine untere und eine obere Grenze erhalten.
- Miss die entsprechenden Längen und berechne die Flächeninhalte der beiden Figuren. Der Flächeninhalt des Kreises liegt zwischen diesen beiden Werten.
- Teile den Kreis nun in acht gleich große Teile. Lege sie erneut zu dieser Figur zusammen und berechne die Flächeninhalte der nun entstehenden Figuren.
- Verfahre ebenso mit einer Zerlegung in 16 Kreisteile. Klebe die 16 Teile auf.



I/D

## M 6 Aufgaben zur Übung und zum Weiterarbeiten

### Aufgabe 1

Berechne den Flächeninhalt A der gegebenen Kreise:

- a)  $r = 19 \text{ cm}$        $A =$   
 b)  $r = 10 \text{ cm}$        $A =$   
 c)  $d = 15 \text{ cm}$        $A =$   
 d)  $d = 8,9 \text{ cm}$        $A =$

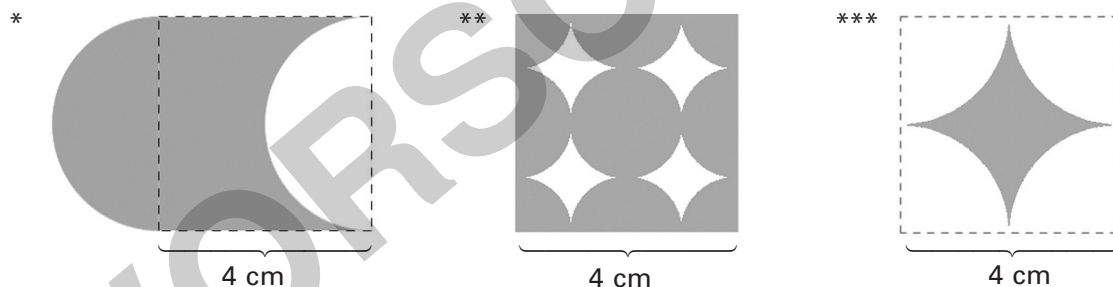
### Aufgabe 2

Berechne den Radius und den Durchmesser der gegebenen Kreise:

- a)  $A = 20 \text{ cm}^2$        $r =$        $d =$   
 b)  $A = 35 \text{ m}^2$        $r =$        $d =$   
 c)  $A = 105 \text{ dm}^2$        $r =$        $d =$   
 d)  $A = 235 \text{ cm}^2$        $r =$        $d =$

### Aufgabe 3

Berechne den Flächeninhalt der folgenden Figuren. Eine Quadratseite ist 4 cm lang.



### Aufgabe 4

In dieser Aufgabe sollst du zeigen, wie sich der Flächeninhalt eines Kreises verhält, wenn der Radius **verdoppelt** wird. Wähle dazu den zu dir passenden Schwierigkeitsgrad:

- \* Berechne den Flächeninhalt der drei Kreise und finde einen Zusammenhang:  
 $r = 5 \text{ cm};$        $r = 10 \text{ cm};$        $r = 20 \text{ cm}.$
- \*\* Wähle drei geeignete Beispielkreise, berechne deren Flächeninhalt und finde einen Zusammenhang.
- \*\*\* Zeige allgemein, wie sich der Flächeninhalt eines Kreises verhält, wenn der Radius verdoppelt wird.

### Aufgabe 5

In den letzten Unterrichtsstunden hast du gelernt, wie sich der Flächeninhalt eines Kreises durch Zerlegen und Zusammenlegen zu einer neuen Figur annähern lässt.

Beschreibe, wie sich mit diesem Verfahren eine Formel für die Berechnung des Umfangs ermitteln lässt.

<b>Reihe 51</b>	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen S 4</b>
-----------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-------------------------

**Aufgabe:** Interpretiere die Ergebnisse in Hinblick darauf, dass wir eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises suchen.

Die Quotienten aus dem Flächeninhalt und dem Radius bzw. dem Durchmesser ergeben eine Streckenlänge, da sich als Einheit „cm“ ergibt. Es lässt sich keine Regelmäßigkeit erkennen. Die Quotienten aus dem Flächeninhalt und dem Quadrat des Radius bzw. dem Quadrat des Durchmessers ergeben dagegen eine dimensionslose Konstante. Der Flächeninhalt ist also proportional zum Quadrat des Radius bzw. des Durchmessers.

## M 5 Die Lösung des Pizzaproblems!

Pizzagröße	Small	Medium	Extra Large	Family
Durchmesser in cm	24	32	38	35 x 55
Flächeninhalt in cm <sup>2</sup>	452,389	804,248	1134,115	1925,000
<b>Pizza Hawaii</b>				
Preis in €	6,90	8,90	12,65	29,90
Preis pro cm <sup>2</sup> in ct	1,525	<b>1,107</b>	1,115	1,553
<b>Pizza Arizona</b>				
Preis in €	8,05	11,20	16,10	35,50
Preis pro cm <sup>2</sup> in ct	1,779	<b>1,393</b>	1,420	1,844
<b>Pizza El Paso</b>				
Preis in €	8,25	10,50	14,60	32,90
Preis pro cm <sup>2</sup> in ct	1,824	1,306	<b>1,287</b>	1,709
<b>Pizza Valdivia</b>				
Preis in €	9,45	12,05	16,85	36,80
Preis pro cm <sup>2</sup> in ct	2,089	1,498	<b>1,486</b>	1,912

I/D

## M 6 Aufgaben zur Übung und zum Weiterarbeiten

### Aufgabe 1

- a)  $r = 19 \text{ cm}$        $A = \pi \cdot r^2 = 1134,115 \text{ cm}^2$   
 b)  $r = 10 \text{ cm}$        $A = \pi \cdot r^2 = 314,159 \text{ cm}^2$   
 c)  $d = 15 \text{ cm}$        $A = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = 176,715 \text{ cm}^2$   
 d)  $d = 8,9 \text{ cm}$        $A = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = 62,211 \text{ cm}^2$

### Aufgabe 2

- a)  $A = 20 \text{ cm}^2$        $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2,52 \text{ cm}$        $d = 5,05 \text{ cm}$   
 b)  $A = 35 \text{ m}^2$        $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 3,34 \text{ m}$        $d = 6,68 \text{ m}$   
 c)  $A = 105 \text{ dm}^2$        $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 5,78 \text{ dm}$        $d = 11,56 \text{ dm}$   
 d)  $A = 235 \text{ cm}^2$        $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 8,65 \text{ cm}$        $d = 17,30 \text{ cm}$