

Da stimmt doch was nicht! – Fehleranalyse zum Rechnen mit Brüchen

I/A

Michael Piechatzek, Dortmund

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Wo steckt der Fehler?¹**Klasse:** 6**Dauer:** 4–5 Stunden**Inhalt:** Wiederholung und Festigung der Grundrechenarten mit Brüchen; Vergleichen, Erweitern und Kürzen von Brüchen**Ihr Plus:** Ihre Schüler erarbeiten sich das Material selbstständig. Sie als Lehrkraft nehmen lediglich eine moderierende Haltung ein.

In der Mathematik baut ein Thema auf dem anderen auf. Häufig stellt man als Lehrer fest, dass den Schülern wesentliche Kenntnisse aus früheren Unterrichtseinheiten fehlen – zum Beispiel Grundlagen zum Thema „Bruchrechnen“. Müssen die Brüche vor der Addition gleichnamig gemacht werden oder nicht? Muss man zur Division zweier Brüche mit dem Kehrwert multiplizieren oder nicht? In dieser Einheit werden typische Schülerfehler und Unsicherheiten identifiziert. So werden Ihre Schüler im Umgang mit Brüchen sicher.

¹Lösung: Die beiden Brüche wurden nicht gleichnamig gemacht.

Didaktisch-methodische Hinweise

„Muss ich die Brüche gleichnamig machen?“ oder „Das mit dem Kehrwert war doch bei der Division, oder?“ sind typische Schülerfragen, wenn es um **Grundrechenarten mit Brüchen** geht. Die unterschiedlichen Regeln sorgen für Verwirrungen. Was genau z. B. hinter der Addition oder der Multiplikation von Brüchen steckt, verstehen die Schüler oft nicht, und die nur auswendig gelernten Rechengesetze geraten dann schnell in Vergessenheit. Wiederholen Sie mithilfe der Materialien **M 1–M 3** die wesentlichen Regeln beim Rechnen mit Brüchen auf eine andere Art und Weise, als sie aus Schulbüchern bekannt ist. Lassen Sie Ihre Schüler typische **Schülerfehler** in den gegebenen Aussagen entdecken und aufklären.

Unterschiedliche Zugänge zur Mathematik sprechen unterschiedliche Lerntypen an. Helfen Sie mit dieser Methode vor allem Schülern, die Schwierigkeiten haben, die Bruchrechnung auf konventionelle Art und Weise zu verstehen.

Ihre Schüler trainieren in einem weiteren Schritt die Kompetenz, Ergebnisse zu präsentieren. Als Gruppe stellen sie ihre Arbeitsergebnisse im Plenum vor und gehen auf Fragen ihrer Mitschüler ein. Sie als Lehrkraft stehen dabei moderierend im Hintergrund. Lassen Sie Ihre Schüler selbstständig an den Problemstellungen arbeiten und anschließend ihre Ergebnisse argumentativ vortragen.

Ablauf

Nutzen Sie die Materialien entweder am Ende einer Lerneinheit zum Thema „Bruchrechnen“ oder verwenden Sie sie sogar als abschließende Einheit am Ende der 6. Klasse.

Material **M 1** befasst sich mit der **Addition**, der **Subtraktion** und dem **Vergleichen** von Brüchen. Nach der Aufteilung in homogene Gruppen befassen sich Ihre Schüler zunächst als Gruppe mit ihrem Arbeitsmaterial. Teilen Sie **Folien** und **Folienstifte** aus, damit die Schüler die Möglichkeit haben, ihre Arbeitsergebnisse festzuhalten. Damit erleichtern Sie Ihren Schülern das Präsentieren ihrer Ergebnisse.

Wesentliche Inhalte dieses Materials sind

- Erweitern und Kürzen von Brüchen,
- Brüche gleichnamig machen, um sie addieren und subtrahieren zu können,
- Brüche vergleichen; die Beziehung zwischen Dezimalzahl und Bruch.

Material **M 2** unterstützt die **Reflexion der Gruppenarbeit**. Verwenden Sie es einmal nach dem Einsatz von Material **M 1** und einmal nach dem Einsatz von Material **M 3**, um eine individuelle Rückmeldung zur Gruppenarbeit zu erhalten und insbesondere um nachvollziehen zu können, an welchen Stellen die Schüler nochmals Hilfestellung benötigen. Diese Bereiche wiederholen und vertiefen Sie dann anschließend. Greifen Sie die Fragen, die offen geblieben sind, in der nächsten Stunde auf.

Material **M 3** ist genauso aufgebaut wie Material **M 1**, befasst sich jedoch mit der **Multiplikation** und **Division** sowie mit dem **Kürzen** und **Erweitern** von Brüchen. Der Verlauf gleicht dem Verlauf von Material **M 1**.

Wesentliche Inhalte dieses Materials sind

- Multiplikation durch Multiplikation von Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner,
- Division von Brüchen durch Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs,
- Multiplikation und Division von Brüchen mit ganzen Zahlen.

Reihe 18 S 3	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Binnendifferenzierung

Differenzierung innerhalb der Klasse ist äußerst gewinnbringend. Gruppen, die die Arbeit an dem Material bereits abgeschlossen haben, versorgen Sie mit einer weiteren Folie, damit sie sich Gedanken über **weitere typische Schülerfehler** bei der Bruchrechnung machen können. Am Ende aller Präsentationen zu den Materialien werden auch diese Arbeitsergebnisse vorgestellt. Dabei decken die Schüler zunächst Fehler in den neu entworfenen Aussagen auf. Das Plenum beziehen Sie direkt mit ein, um nach einer Verbesserung für die falsche Aussage zu suchen.

I/A

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schülerinnen und Schüler ...	Anforderungsbereich
K 2	L 1	... lernen die Bruchrechnung aus der Perspektive eines korrigierenden Lehrers kennen und müssen zunächst nachvollziehen, was die Aussage fachlich beschreibt, um in einem weiteren Schritt den Fehler zu korrigieren,	I–III
K 1	L 1, L 4	... suchen nach einer Begründung für den beschriebenen Fehler, ... erarbeiten daraus Schwierigkeiten bei der Bruchrechnung,	I, II
K 6	L 1	... reflektieren die Ergebnisse der Gruppenarbeit,	I
K 1	L 1, L 4	... präsentieren ihre Arbeitsergebnisse und gehen auf Fragen ihrer Mitschüler ein.	II

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf der beiliegenden CD-ROM 52.

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	Da stimmt doch was nicht! – Fehler bei der Bruchrechnung Typische Schülerfehler bei der Addition, der Subtraktion und beim Vergleichen von Brüchen erkennen und verbessern	1.–2.
M 2	Wie ist es gelaufen? – Die Gruppenarbeit reflektieren Reflexion der Gruppenarbeit im Hinblick auf positive und negative Erfahrungen innerhalb der Gruppenarbeit; Klären von Fragen	2.
M 3	Da stimmt doch was nicht! – Fehler bei der Bruchrechnung Typische Schülerfehler bei der Multiplikation und Division von Brüchen erkennen und verbessern	3.–4.
(M 2)	Wie ist es gelaufen? – Die Gruppenarbeit reflektieren Reflexion der Gruppenarbeit und Vorstellen eigener Aufgaben	5.

Reihe 18	Verlauf	Material S 1	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

I/D

M 1 Da stimmt doch was nicht! – Fehler bei der Bruchrechnung

Aufgaben

1. Findet euch zu Vierer-Gruppen zusammen. Bestimmt einen Gruppensprecher.
2. Jede Gruppe erhält eine Gruppenkarte.
3. Korrigiert die Fehler der Schüler. Fasst kurz zusammen, worin der Fehler jeweils liegt, und berichtigt die falschen Aussagen. Fertigt dazu gegebenenfalls eine neue Rechnung an.
4. Stellt nun eure Arbeitsergebnisse in der Klasse vor. Geht dabei auf Fragen eurer Mitschüler ein.



Gruppe 1

Annika:

Ich addiere zwei Brüche zueinander, indem ich die beiden Zähler der Brüche addiere und die beiden Nenner der Brüche addiere.

Lukas:

So habe ich es gemacht:

a) $0,45 < 0,238$

b) $0,23 = \frac{23}{10}$

Katti:

Ich erweitere den Bruch $\frac{3}{8}$ mit 6, indem ich den Nenner mit der Zahl 6 multipliziere.



Gruppe 2

Katja:

Ist doch klar! So geht's:

$$\frac{4}{3} + \frac{7}{2} = \frac{11}{5}$$

Felix:

Ich kürze den Bruch $\frac{4}{12}$ zu $\frac{1}{4}$.

Ist doch o.k.!

Mareike:

Ich subtrahiere zwei Brüche, indem ich den einen Zähler vom anderen subtrahiere.



I/D

M 2

Wie ist es gelaufen? – Die Gruppenarbeit reflektieren

Nach einer Gruppenarbeit ist es wichtig, sich noch einmal Gedanken zu machen, was du in der Arbeitsphase gut und was weniger gut verstanden hast. Auch solltest du die Lernatmosphäre innerhalb der Gruppe beschreiben. Dabei hilft folgendes Raster:

Zum Umgang mit dem Gruppenreflexionsbogen

1. Jeder von euch bekommt einen äußeren Bereich des Rasters, in den er binnen fünf Minuten alles einträgt, was gut und was weniger gut gelaufen ist oder was sie/er noch nicht verstanden hat.
2. Besprecht euch nun innerhalb der Gruppe. Schreibt in das mittlere Feld, was ihr gemeinsam an der Gruppenarbeit gut und was weniger gut fandet, und ganz besonders, welche Fragen noch offen sind.

Reihe 18	Verlauf	Material S 4	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 3 Da stimmt doch was nicht! – Fehler bei der Bruchrechnung

I/A

Aufgaben

1. Findet euch zu Vierer-Gruppen zusammen. Bestimmt einen Gruppensprecher.
2. Jede Gruppe erhält eine Gruppenkarte.
3. Korrigiert die Fehler der Schüler. Fasst kurz zusammen, worin der Fehler jeweils liegt, und berichtigt die falschen Aussagen. Fertigt dazu gegebenenfalls eine neue Rechnung an.
4. Stellt nun eure Arbeitsergebnisse in der Klasse vor. Geht dabei auf Fragen eurer Mitschüler ein.



Gruppe 1

Myriam:

Zum Multiplizieren von zwei Brüchen muss man sie gleichnamig machen. Das ist wichtig!

Matthias: So ist das richtig:

$$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

Marcel:

Also ich hab's so gemacht:

$$\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9:3}{10} = \frac{3}{10}$$



Gruppe 2

Marie:

Ich multipliziere einen Bruch mit einem anderen, indem ich mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziere. Anschließend muss ich überprüfen, ob der Bruch noch gekürzt werden kann. Zur Not kann ich ihn ja noch erweitern.

Marco:

Beim Multiplizieren von Brüchen multipliziere ich stets die Zähler miteinander. Der Nenner bleibt doch immer gleich! Ist doch klar!

Josua:

Bei mir sieht die Division so aus:

$$\frac{10}{15} : 5 = \frac{10}{15:5} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$



Reihe 18	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen S 3
-----------------	----------------	-----------------	------------	----------------	------------------------

M 3 Da stimmt was nicht! – Fehler bei der Bruchrechnung

■ In diesem ersten Material geht es um Fehler beim Multiplizieren und Dividieren von Brüchen.

I/A

Gruppe 1

Zu Myriam: Um Brüche multiplizieren zu können, müssen sie nicht zuvor gleichnamig gemacht werden. Dieser Schritt ist überflüssig. Er würde am Ende einen zusätzlichen Kürzungsschritt erforderlich machen.

Zu Matthias: Die ganze Zahl, mit der der Bruch multipliziert wird, muss mit dem Zähler und nicht wie hier im Beispiel mit dem Nenner multipliziert werden.

Die korrekte Rechnung lautet:

$$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}.$$

Zu Marcel: Hier wurde der Fehler begangen, die Division wie die Addition zu behandeln. Die korrekte Rechnung lautet:

$$\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{3}{1} = 3.$$

D.h., um zwei Brüche durcheinander zu dividieren, multipliziert man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches.

Gruppe 2

Zu Marie: Marie verwechselt die Multiplikation mit der Division. Bei der Multiplikation multipliziert man stets Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Am Ende ihres Satzes macht sie noch einen weiteren Fehler. Brüche werden in der Regel soweit gekürzt wie möglich, aber nie unnötig erweitert.

Zu Marco: Hier scheint es zu einer Verwechslung von Addition und Multiplikation gekommen zu sein. Auch die Nenner müssen bei der Multiplikation miteinander multipliziert werden.

Zu Josua: Bei der Division eines Bruches durch eine ganze Zahl muss der Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert werden. Hier wurde der Nenner allerdings durch die ganze Zahl dividiert.

Die korrekte Rechnung sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{10}{15} : 5 = \frac{10}{15 \cdot 5} = \frac{10}{75} = \frac{2}{15}.$$

Gruppe 3

Zu Noel: In diesem Fall wurde vergessen, die beiden Nenner auch miteinander zu multiplizieren. Die korrekte Version sieht wie folgt aus:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zu Lars: Hier ist der Fall aufgetreten, dass die Addition und Multiplikation kombiniert wurden. Die Nenner sind jedoch auch zu multiplizieren:

$$\frac{7}{6} \cdot \frac{8}{6} = \frac{56}{36} = \frac{14}{9} = 1 \frac{5}{9}.$$