Didaktisch-methodische Orientierung

Dreieckskonstruktionen folgen unmittelbar nach den Grundkonstruktionen im Anfangsunterricht der Geometrie. Symmetrie und Kongruenz sind ebenfalls bereits Inhalte des ersten Lernjahres. In diesem Zusammenhang dürfen auch die Kongruenzsätze für Dreiecke nicht fehlen. Die Ähnlichkeit bietet sich als Weiterentwicklung direkt an und wird optional als Abschluss angeboten. Die große Bedeutung der Stabilität einer Dreieckskonstruktion in der Baustatik erkennt man an den Stahlbrücken, -türmen und -kränen. Eine Übertragbarkeit auf Vierecke wird geprüft, stellt sich aber als nicht möglich heraus.

Benötigte Vorkenntnisse

Die Schülerinnen und Schüler sollten geometrische Grundkonstruktionen beherrschen, den Begriff Kongruenz oder Deckungsgleichheit kennen und möglichst auch die besonderen Linien im Dreieck für weitere Konstruktionsübungen (Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Höhen).

I/D

Vorgehen

Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten sich die Kongruenzsätze handelnd und weitestgehend selbstständig. Dazu schneiden sie zunächst die vier „Seiten" und die drei Winkel der Bastelvorlage von Material **M 1** (am besten auf festeres Papier kopiert) aus. Mit diesen Elementen erproben sie nicht nur, mit wie vielen Teilen eine eindeutige Festlegung von Form und Größe eines Dreiecks erfolgen kann, sondern auch, welche Kombinationsmöglichkeiten es dabei gibt.

Mit Musterbeutelklammern basteln sie aus diesen Teilen zunächst ein Dreieck ABC (in Form und Größe eindeutig, also stabil). Das Viereck dagegen ist instabil, wenn man nicht eine Diagonale als „Strebe" einspannt. Es ergibt sich unmittelbar der „**SSS-Satz**". Anschließend wird in **M 2** zunächst ein möglicher „WWW-Satz" verworfen und der „**WWS-Satz**" bestätigt. Bei dem gewünschten Begründungsniveau hat die Lehrkraft uneingeschränkte Wahl im Bereich zwischen Ankreuzen und strengem Beweis. **M 3** liefert schließlich noch den fehlenden Kongruenzsatz „**SSW_{gr}**" und schließt eine weitere (zweideutige) Variante aus. **M 4** enthält eine **Zusammenfassung** der Regeln und **Übungskonstruktionen**.

Die in Form und Größe eindeutige Festlegung eines Dreiecks kann auch durch andere Größen als Seitenlängen und Winkel geschehen. **M 5** befasst sich mit einigen Beispielen und Aufgaben zur Konstruktion zum Beispiel mit **Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden oder Höhe**.

Die faszinierende Stabilität von Dreiecken am Beispiel **statisch kritischer Konstruktionen** wie Kränen, Stahlbrücken oder dem Eiffelturm soll in **M 6** (unterstützt durch eine Farbfolie) zur weiteren Internetrecherche von geeignetem Bildmaterial einladen. In **M 7** werden exemplarisch einige **Vierecks-Kongruenzsätze** andiskutiert (die Aufgaben eignen sich sehr gut für Gruppenarbeit), **M 8** schließlich stellt einen Ausblick vom (bei der strengen Kongruenzbedingung verworfenen) „WWW-Satz" in Richtung **Ähnlichkeit** dar und rettet ihn in diesem Sinne doch noch!

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen

– die Kongruenzsätze kennen lernen,
– ihre Nützlichkeit bei Beweisen erkennen,
– die Stabilität des Dreiecks als baustatisches Grundwissen behalten,
– die Ähnlichkeit als unmittelbare Weiterentwicklung kennen lernen.

Materialübersicht

Die Lösungen zu den Materialien finden Sie ab Seite 13.

M 1 Wie stabil sind Dreiecke und Vierecke?

Forschungsauftrag

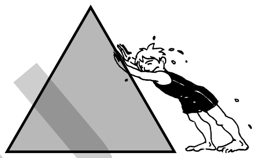
Überprüfe die Stabilität von Dreiecken und Vierecken. Schneide zu diesem Zweck alle „Seiten" der Bastelvorlage aus und durchstoße sie vorsichtig an den markierten Stellen (bei A, B und C).

1) Verbinde die drei Seiten a, b und c mithilfe von Musterbeutelklammern zu einem Dreieck ABC. Lassen sich die Innenwinkel des Dreiecks nun noch verändern oder liegen sie durch Vorgabe der drei Seitenlängen fest?

   Ergebnis: Das Dreieck ABC mit drei vorgegebenen Seitenlängen

   ☐ *ist formstabil.*

   ☐ *ist nicht formstabil.*

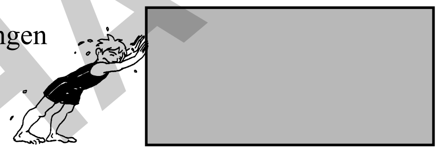


2) Öffne an einer Ecke die Klammer und setze dort die vierte Seite (Vierecksseite) ein. Überprüfe das Viereck auf Formstabilität.

   Ergebnis: Das Viereck mit vier vorgegebenen Seitenlängen

   ☐ *ist formstabil.*

   ☐ *ist nicht formstabil.*



3) Öffne nun die Klammern an zwei gegenüberliegenden Ecken und setze noch die Diagonale ein. Wie wirkt sie sich auf die Stabilität des Vierecks aus?

   Ergebnis: Das Viereck mit vier vorgegebenen Seitenlängen und einer gegebenen Diagonalenlänge

   ☐ *ist formstabil.*

   ☐ *ist nicht formstabil.*

Fazit:

Ein Dreieck ist in Form und Größe durch die Länge der drei Seiten eindeutig festgelegt.

Anders ausgedrückt („________________________________**-Satz**"):

M 2 Form und Größe – beides muss stimmen!

Wiederholung: Die Form und Größe eines Dreiecks wird durch seine **drei Seitenlängen** eindeutig festgelegt. (______________________________-Satz)

Frage: Reichen auch <u>weniger</u> als drei Bestimmungsstücke aus, um ein Dreieck eindeutig festzulegen? Also zum Beispiel nur die Angabe von zwei Seitenlängen?

Aufgabe 1

Überprüfe zeichnerisch-experimentell an einem beliebigen Dreieck ABC, ob die Angabe von **nur zwei** der sechs Größen a, b, c, α, β, γ für eine (bis auf Kongruenz) eindeutige Konstruktion genügt.

Ergebnis: Die Angabe von nur zwei Bestimmungsgrößen eines Dreiecks

❑ *kann*

❑ *kann niemals*

ausreichen, ein Dreieck (bis auf Kongruenz) eindeutig festzulegen.

Aufgabe 2

Kann ein Dreieck auch durch andere Bestimmungsstücke als die drei Seitenlängen in Form und Größe eindeutig festgelegt werden?

Überprüfe, ob die Angabe der **drei Winkel** ausreicht, um ein Dreieck eindeutig festzulegen:

Versuche, zwei nicht kongruente Dreiecke zu zeichnen, die in allen drei Winkeln übereinstimmen.

Ergebnis: Zwei Dreiecke, die in allen drei Winkeln übereinstimmen

❑ *sind kongruent.*

❑ *sind nicht unbedingt kongruent.*

Aufgabe 3

Wie sieht es nun aus mit der Angabe von zwei Winkeln und einer Seite?

Überprüfe an einem beliebigen Beispiel die Gültigkeit des folgenden Satzes und kreuze die richtige Aussage an.

Zwei Dreiecke, die in zwei Winkeln und einer Seitenlänge übereinstimmen, sind kongruent.

Ergebnis: Der Satz ist

❑ *richtig.*

❑ *falsch.*

(______________________-Satz)

M 8 Immerhin die Form gewahrt!

Bei der Erarbeitung der Kongruenzsätze hat sich herausgestellt, dass Dreiecke durch zwei Winkel (der dritte ist wegen der Innenwinkelsumme ja dann auch bekannt!) noch nicht eindeutig in Form und Größe festgelegt sind.
Das Tafelgeodreieck und das Geodreieck im Federmäppchen sind schöne Beispiele: Sie haben gleiche Winkel und sind dennoch nicht kongruent. Allerdings kann man einen Teil der Aussage von Kongruenzsätzen auch für diesen Fall „retten", die **Form** des Dreiecks ist nämlich durch zwei Winkelangaben eindeutig festgelegt; die Größe kann variieren. Solche Dreiecke von gleicher Form und verschiedener Größe nennt man „ähnliche" Dreiecke.

„WWW-Ähnlichkeitssatz":

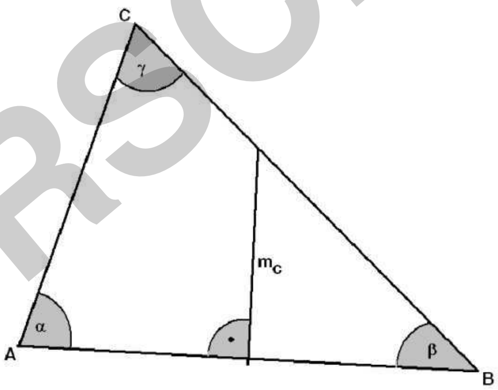
Zwei Dreiecke, die in allen drei Winkeln übereinstimmen, sind formgleich oder „ähnlich".

Viele Dreieckskonstruktionen werden durch die Ähnlichkeitsüberlegungen viel einfacher oder gar erst möglich.

Beispiel:

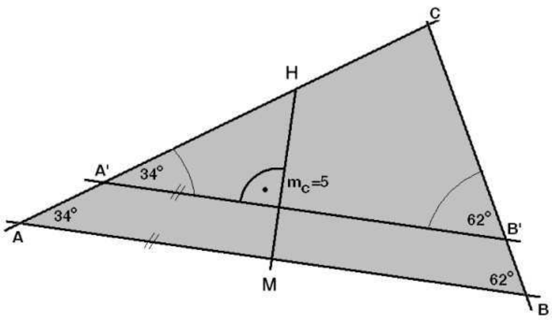
Konstruiere ein Dreieck ABC mit $m_c = 5;\ \alpha = 34°;\ \beta = 62°$.

Skizze:



Mithilfe der Ähnlichkeit kann man die Aufgabe folgendermaßen lösen:

Zeichne zunächst ein beliebiges Dreieck A'B'C mit den gegebenen Winkeln und trage m_c ein. Ihre Länge stimmt im Allgemeinen nicht. Verschiebe nun die Seite A'B' parallel, bis die Mittelsenkrechte die richtige Länge hat (trage also die Länge 5 mit dem Zirkel vom Hilfspunkt H aus bei m_c an):



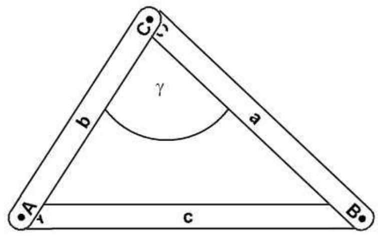
Erläuterungen und Lösungen

Die vorliegenden Lösungen sind so formuliert, dass sie bei Bedarf direkt kopiert und an die Lerngruppe zur Selbstkontrolle ausgeteilt werden können.

Lösungen (M 1)

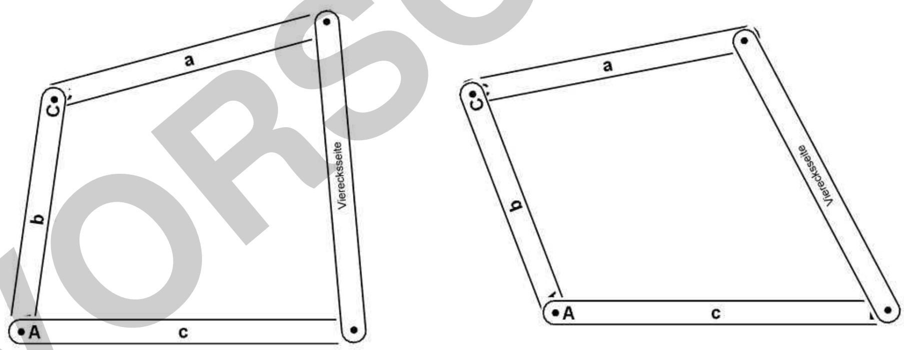
Die Bastelvorlage von M 1 sollte auf etwas festeres Papier kopiert werden. Weiterhin werden Musterbeutelklammern benötigt.

Zu 1.:

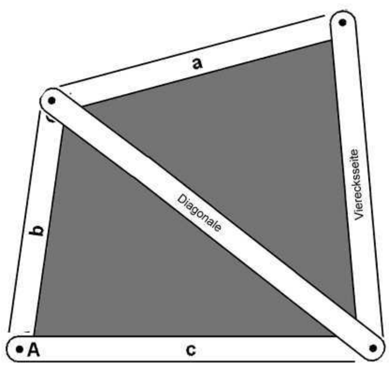


Das Dreieck ABC ist „formstabil"; die Winkel in den Ecken lassen sich nicht verändern.

Zu 2.:
Das entstehende Viereck ist „nicht formstabil", es lassen sich die Innenwinkel verändern.



Zu 3.:



Bei einer ebenen Viereckskonstruktion lässt sich Stabilität (und damit Eindeutigkeit!) nur durch Einbau einer Diagonalen erreichen.

Durch die Diagonale wird das Viereck allerdings in zwei Dreiecke unterteilt – und deren Stabilität überrascht ja nicht.

Es ergibt sich der SSS-Satz (Seite-Seite-Seite-Satz).