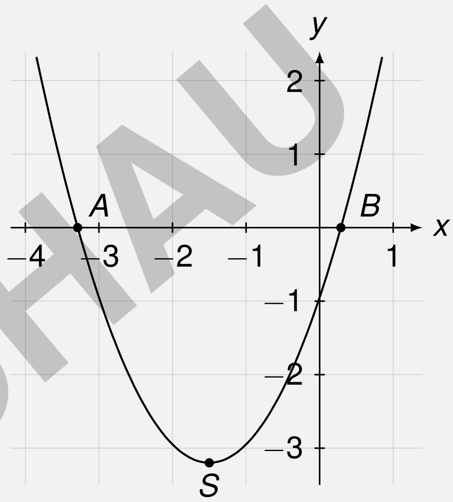
Inhalt

1 Quadratische Gleichungen

Motivation: Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung, bei der mindestens ein Exponent von x zwei lautet. Es muss also ein x^2 vorkommen.
Wenn andere Exponenten als eins oder zwei in der Gleichungen stehen, handelt es sich um keine quadratische Gleichung mehr. Anstelle von x können wir natürlich auch eine andere Variable verwenden. In der unteren Abbildung ist eine quadratische Funktion abgebildet, wobei die Punkte A und B die Nullstellen angeben und der Punkt S den Scheitelpunkt angibt.



Mit quadratischen Gleichungen können wir eine Vielzahl von Problemen lösen, die auf den ersten Blick nicht unbedingt aus dem Alltag kommen. Mal angenommen, du willst einen Freund mit einem Schneeball aus weiter Distanz genau am Kopf treffen. Mit Hilfe der Physik und quadratischen Gleichungen lässt sich genau ausrechnen, wie du den Schneeball werfen musst. Versuche zu erkennen, ob es sich bei den folgenden Gleichungen um quadratische Gleichungen handelt:

Einstieg

A.1.1

Gleichung	**Quadratische Gleichung?**
$y = x^2 + 3x - 2$	○ ja ○ nein
$f(x) = x^2 + 3x^3 - 2$	○ ja ○ nein
$f(t) = at^2 - bt - 3$	○ ja ○ nein
$f(t) = x^3 + 3t^2 - 2$	○ ja ○ nein
$y = 3x - 2$	○ ja ○ nein
$y = (3x - 2) \cdot (4x + 4)$	○ ja ○ nein

1.1 Allgemeine Form

Allgemein sieht eine quadratische Funktion folgendermaßen aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Falls $a = 1$ ist, sprechen wir von der Normalform. Falls $a = 0$ ist, ist diese Funktion nicht mehr quadratisch, sondern linear.

Normalform: $f(x) = x^2 + bx + c$

1.2 Scheitelpunktform

Scheitelpunkt-form erkennen

Normalform auf Scheitelpunkt-form (1)

Normalform auf Scheitelpunkt-form (2)

Die Scheitelpunktform kommt eher selten vor, ist jedoch sehr praktisch, wenn wir den Scheitelpunkt der Funktion bestimmen wollen, also den Hoch-/Tiefpunkt der Funktion. Sie lautet:

Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - d)^2 + e$

Der Scheitelpunkt lautet $S(d|e)$ und lässt sich direkt ablesen. Es folgt ein **Beispiel**, wie wir eine quadratische Gleichung in Scheitelpunktform bringen können:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$	Wir schauen, welche Zahl noch fehlt, um aus $f(x) = x^2 - 2x$ eine binomische Formel zu machen. In diesem Fall fehlt $+1$.
$f(x) + 1 = x^2 - 2x + 1 - 3$	Wir addieren also auf beiden Seiten mit 1 und vereinfachen den Ausdruck.
$f(x) + 1 = (x - 1)^2 - 3$	$\mid -1$
$f(x) = (x - 1)^2 - 4$	Scheitelpunkt ablesen $S(1\mid -4)$.

Aufgaben

A.1.2.1 Bestimme den Scheitelpunkt folgender Funktionen. Überführe, wenn nötig, in die Scheitelpunktform.

a) $f(x) = 5 \cdot (x - 3)^2 - 3$

b) $g(x) = 3 \cdot (x + 1)^2 + 2$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 3$

d) $i(x) = 3x^2 - 4x + 12$

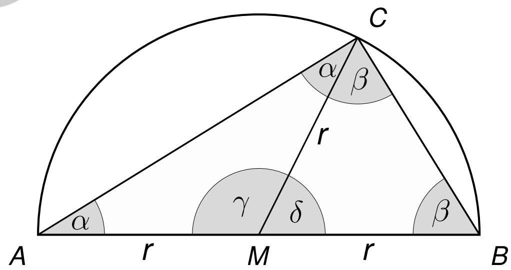
4 Trigonometrische Funktionen

Die Trigonometrie vereinfacht uns in vielerlei Hinsicht das Rechnen. Durch die Grundfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens haben wir die Möglichkeit, fehlende Winkel oder Seitenlängen zu berechnen. Selbst wenn wir kein rechtwinkliges Dreieck gegeben haben, was die Voraussetzung für diese Funktionen ist, können wir meist doch ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, um die Vorteile der Trigonometrie zu benutzen.

Die Trigonometrie findet nahezu überall Anwendung - ob in der Physik (z.B. wenn Kräfteverteilungen nach Richtungen aufgeteilt werden), in der Elektrotechnik (z.B. Feldrichtungen), im Maschinenbau oder Bauwesen. Die trigonometrischen Funktionen sind absolute Grundlagen in der Mathematik.

Was du bisher kannst und hier anwendest:

- Satz des Pythagoras
- Umgang mit Winkeln
- Grundlagen bei Dreiecken
- Thaleskreis



4.1 Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke

Satz von Thales

<u>1. Fall:</u>
Kathete und Hypotenuse geg.

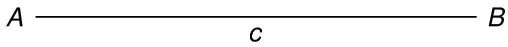
1. Zeichne die Hypotenuse c.
2. Zeichne nun den Thaleskreis um c.
3. Zeichne die gegebene Kathete ein.
4. Ergänze die fehlende Kathete.

<u>2. Fall:</u>
zwei Katheten (*a* und *b*) geg.

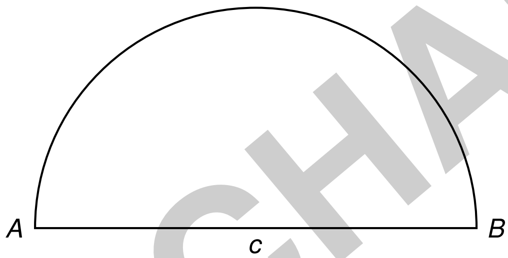
1. Zeichne die erste Kathete.
2. Zeichne die zweite Kathete ausgehend vom Punkt C im rechten Winkel ein.
3. Verbinde die Katheten nun mit der Hypotenuse c.

Wir schauen uns zum besseren Verständnis ein **Beispiel** an. Konstruiere das rechtwinklige Dreieck mit den gegebenen Werten $c = 7$ cm (Hypotenuse) und $a = 4$ cm (Kathete).

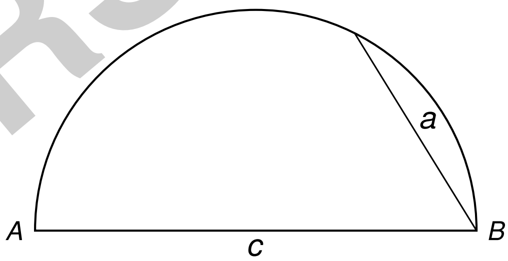
1. Wir zeichnen die Hypotenuse c ein:



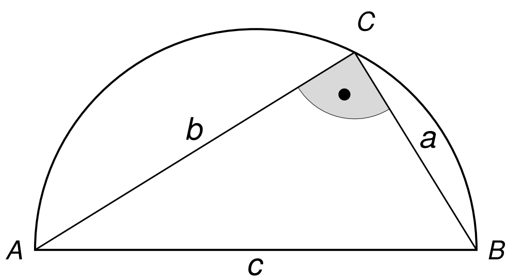
2. Nun zeichnen wir den Thaleskreis:



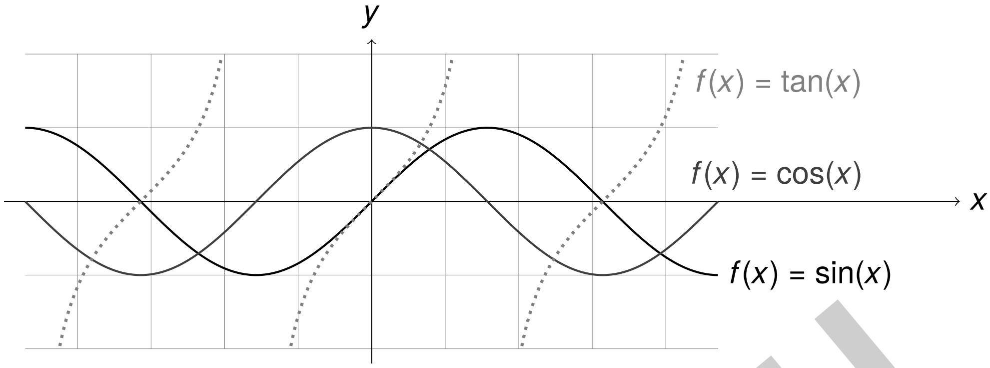
3. Als nächstes tragen wir die Kathete a vom Punkt B bis auf den Thaleskreis ein:



4. Schließlich ergänzen wir die fehlende Kathete:



nen. Doch wie genau sehen die Funktionen aus? Oft macht es Sinn, sich den Verlauf einer Funktion anzuschauen. Auf diese Weise werden unklare Zusammenhänge häufig deutlicher.



Aufgaben

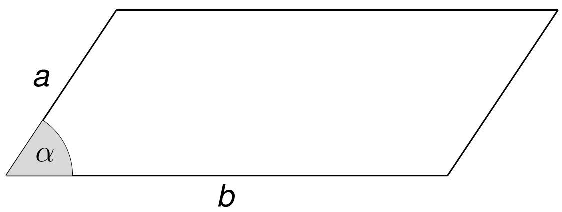
A.4.3.1 Der Winkel α liegt immer beim Punkt A, während β immer beim Punkt B liegt. Ein rechtwinkeliges Dreieck ist immer so beschriftet wie in dem Kochrezept zur Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke dargestellt. In der folgenden Aufgabe sei α immer der Bezugswinkel, das bedeutet falls der Winkel β und die Ankathete a gegeben ist, ist b die Gegenkathete zum Winkel β.

Berechne die fehlende(n) Kathete(n)/Hypotenuse mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen.

a) $b = 7$ cm, $\alpha = 40^\circ$
b) $a = 4$ cm, $\alpha = 25^\circ$
c) $c = 14$ cm, $\alpha = 63^\circ$
d) $b = 9$ cm, $\beta = 36^\circ$
e) $c = 23$ cm, $\alpha = 23^\circ$
f) $a = 4$ cm, $\beta = 72^\circ$

4.4 Sinus, Kosinus und Tangens als Vorteil in geometrischen Anordnungen

Jetzt wissen wir, wie mit Sinus, Kosinus und Tangens vorteilhaft gerechnet werden kann und haben schon eine Vorstellung davon, wie die Funktionen graphisch aussehen (dazu später mehr). Allerdings kommen in der Geometrie nicht immer (rechtwinklige) Dreiecke vor. Wie können wir also die Vorzüge der Trigonometrie weiter nutzen? Schauen wir uns beispielsweise folgendes Parallelogramm an:



8 Stochastik (Wahrscheinlichkeiten)

Wahrscheinlichkeiten werden in sämtlichen Gebieten gebraucht, um Dinge vorherzusagen oder abschätzen zu können. Dieses Thema behandeln wir direkt im Anschluss zum Thema **Daten**, da Wahrscheinlichkeiten auf Grundlage von bereits bekannten Daten errechnet werden. Beispielsweise beruht die Wettervorhersage genau auf diesen Komponenten. Es werden eine Menge Daten aufgezeichnet, gesammelt und ausgewertet, woraus sich eine Wettervorhersage ergibt. Diese Vorhersage muss zwar nicht zu 100% zutreffen, aber sie ist die wahrscheinlichste Option. Heutzutage treffen die Wettervorhersagen übrigens zu 90-95% (mit einer Schwankung von $\pm 2°\mathrm{C}$) zu.

Aber auch in technischen Bereichen spielen Wahrscheinlichkeiten eine wichtige Rolle. So lassen sich beispielsweise bei der Untersuchung von Signalen nach gewisser Zeit Muster und damit Wahrscheinlichkeiten erkennen.

8.1 Mehrstufige Zufallsversuche (Baumdiagramm)

Wir sprechen von einem mehrstufigen Zufallsversuch, wenn der Zufallsversuch aus mehreren Schritten besteht, die für sich selbst auch Zufallsversuche sind.

Wir könnten auch sagen, dass einstufige Zufallsversuche durch mehrmalige Ausführung zu mehrstufigen Zufallsversuchen werden. Zur Veranschaulichung mehrstufiger Zufallsversuche benutzen wir **Baumdiagramme**. In diesem Kapitel schauen wir uns zwei- und dreistufige Zufallsversuche an.

Bevor wir auf die Zufallsversuche eingehen und Wahrscheinlichkeiten bestimmen, müssen wir wissen, wie diese Wahrscheinlichkeiten eines Baumdiagrammes berechnet werden. Das geht mit Hilfe der **Pfadregeln**:

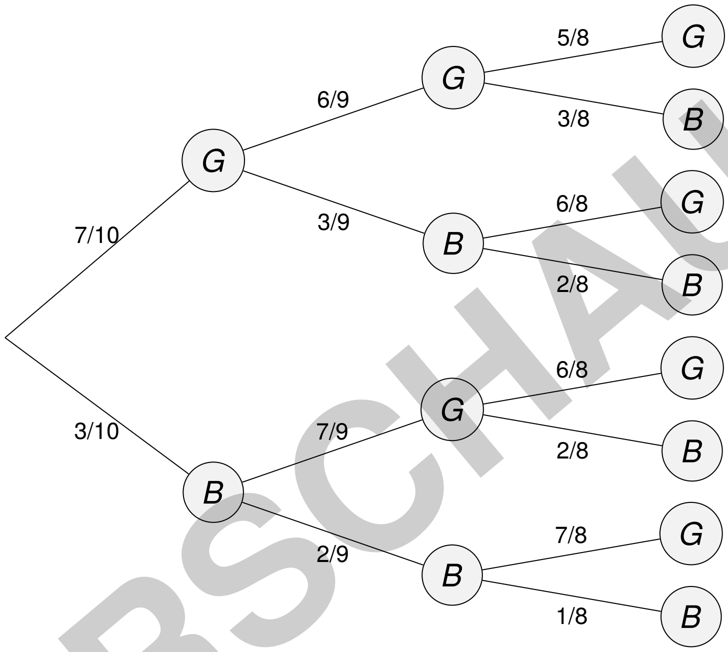
- **1. Pfadregel**: Um die Wahrscheinlichkeit für einen ganz bestimmten Versuchsausgang zu erhalten, müssen die Wahrscheinlichkeiten entlang des jeweiligen Pfades **multipliziert** werden.
- **2. Pfadregel**: Soll die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das mehrere Versuchsausgänge umfasst, berechnet werden, müssen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Versuchsausgänge **addiert** werden.

8.1.2 Dreistufiger Zufallsversuch (ohne Zurücklegen)

Schauen wir uns das Baumdiagramm eines weiteren Beispiels für mehrstufige Zufallsversuche an. In diesem Beispiel nehmen wir einen Beutel mit 7 grünen (G) und 3 blauen (B) Kugeln, aus dem wir drei Mal ohne zurücklegen ziehen. Achtung: Hier ist direkt ein Unterschied zum vorherigen Beispiel des Münzwurfs zu erkennen. Da gezogene Kugeln nicht zurückgelegt werden, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten im zweiten Zug.

ohne Zurücklegen

Urnenmodell



Wir können nun alle Wahrscheinlichkeiten aus unserem Baum bis zum dritten Zug ablesen. Nehmen wir beispielsweise den obersten Pfad:

Wir ziehen aus unserer Gesamtmenge von 10 Kugeln eine grüne. Die Wahrscheinlichkeit für eine grüne Kugel liegt bei $P(G) = 7/10 = 70\%$. Da ohne zurücklegen gezogen wird, ziehen wir beim nächsten Zug nur noch aus der Gesamtmenge von 9 Kugeln. Was bedeutet das? Die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, ist gestiegen ($P(B) = 3/9$) und die Wahrscheinlichkeit, eine grüne Kugel zu ziehen, ist gesunken ($P(G) = 6/9$), da nur noch 6 statt 7 grüne Kugeln im Beutel sind.

Die Wahrscheinlichkeit, in zwei Zügen zwei Mal eine grüne Kugel zu ziehen, liegt bei $P(G, G) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 42/90 \approx 47\%$ (1. Pfadregel).

Nun hat sich der Beutel wieder um eine grüne Kugel reduziert, sodass die Wahrscheinlichkeit, im obersten Pfad wieder eine grüne Kugel zu ziehen bei $P(G) = \frac{5}{8}$ liegt. Fragen wir uns nun, wie wahrscheinlich es ist, drei Mal hintereinander eine grüne Kugel zu ziehen, erhalten wir: $P(G, G, G) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{210}{720} \approx 29{,}2\%$.