Inhalt

1 Rationale Zahlen & Proportionalität 5
- 1.1 Multiplizieren und Dividieren 5
- 1.2 Kürzen und Erweitern 6
- 1.3 Addieren und Subtrahieren 6
- 1.4 Proportionale und antiproportionale Zuordnungen 7
- 1.5 Aufgaben 8

2 Prozent- und Zinsrechnung 9
- 2.1 Grundlagen 9
- 2.2 Zinsrechnung 11
- 2.3 Aufgaben 13

3 Reelle Zahlen 15
- 3.1 Quadrieren 15
- 3.2 Rechnen mit Wurzeln 16
- 3.3 Aufgaben 17

4 Potenzen 19
- 4.1 Rechnen mit Potenzen 19
- 4.2 Potenzen potenzieren 21
- 4.3 Ganzzahlige Exponenten 21
- 4.4 Zahlen mit Zehnerpotenzen schreiben 21
- 4.5 Aufgaben 22

5 Funktionen darstellen 23
- 5.1 Lineare Funktionen darstellen 24
- 5.2 Quadratische Funktionen darstellen 26
- 5.3 Aufgaben 29

6 Flächensätze 31
- 6.1 Satz des Thales 31
- 6.2 Satz des Pythagoras 31
- 6.3 Kathetensatz 32

6.4 Höhensatz . . . 33
6.5 Aufgaben . . . 33

7 Geometrische Abbildungen . . . 35
7.1 Kongruenzabbildungen . . . 35
7.2 Maßstäbe - Vergrößern und Verkleinern . . . 36
7.3 Zentrische Streckungen . . . 37
7.4 Strahlensätze . . . 38
7.5 Aufgaben . . . 39

8 Quadratische Gleichungen . . . 41
8.1 Äquivalenzumformungen . . . 41
8.2 Quadratische Gleichungen lösen . . . 41
8.3 Aufgaben . . . 46

9 Lineare Gleichungssysteme . . . 47
9.1 LGS zeichnerisch lösen . . . 47
9.2 Einsetzungsverfahren . . . 48
9.3 Gleichsetzungsverfahren . . . 50
9.4 Additionsverfahren . . . 52
9.5 Aufgaben . . . 55

10 Flächenberechnungen . . . 57
10.1 Umfang von Vielecken . . . 57
10.2 Flächeninhalt von Dreiecken . . . 57
10.3 Flächeninhalt von Vierecken . . . 58
10.4 Kreisfläche und Kreisumfang . . . 61
10.5 Aufgaben . . . 63

11 Körperberechnungen . . . 65
11.1 Prismen . . . 65
11.2 Pyramiden . . . 67
11.3 Zylinder . . . 68
11.4 Kegel . . . 70
11.5 Aufgaben . . . 70

12 Daten und Zufall . . . 71
12.1 Daten analysieren . . . 71
12.2 Wahrscheinlichkeiten . . . 73
12.3 Erwartungswert und Gewinnwahrscheinlichkeit . . . 77
12.4 Aufgaben . . . 79

A Lösungen . . . 81

1 Rationale Zahlen & Proportionalität

Was sind rationale Zahlen?

Eine rationale Zahl ist eine Zahl $q = \frac{n}{m}$, die durch die Division zweier ganzer Zahlen n und m entsteht. Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Das sind zum Beispiel $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ oder auch $\frac{7}{2}$. Wir können auch jede natürliche und ganze Zahl als eine rationale Zahl schreiben. Beispielsweise:

$$3 = \frac{3}{1} \qquad -17 = \frac{-17}{1}$$

Oft wird auch von Brüchen gesprochen. Die obere Zahl wird **Zähler**, die untere Zahl **Nenner** genannt.

Rationale Zahlen helfen uns mit Anteilen, Verhältnissen und vielen anderen alltäglichen Anwendungen zu rechnen und umzugehen.

Wie können wir Brüche aufstellen? Betrachten wir eine Klasse mit 25 Schülern, von denen 12 Jungen sind, so beschreiben wir den Anteil der Jungen in der Klasse mit $\frac{12}{25}$.

1.1 Multiplizieren und Dividieren

Wir beginnen nun mit den Rechenarten für rationale Zahlen und schauen uns ein paar Beispiele an, wie wir zwei rationale Zahlen miteinander multiplizieren:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35} \qquad \frac{-3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{-3 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{-12}{10}$$

Multiplizieren und Dividieren

Als einfache Merkregel für die **Multiplikation** gilt:

„Zähler mal Zähler" und „Nenner mal Nenner"

Die Multiplikation machen wir uns für die Division zunutze, indem wir statt zu dividieren mit dem Kehrbruch multiplizieren:

$$\frac{3}{6} : \frac{7}{4} = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{6 \cdot 7} = \frac{12}{42}$$

Wir merken uns für die **Division**:

Division = Multiplikation mit dem Kehrbruch

1.2 Kürzen und Erweitern

Kürzen und Erweitern

Nachdem wir uns die ersten Rechenregeln angeschaut haben, kommen wir zu einer weiteren Besonderheit von rationalen Zahlen. Wir können uns das Leben deutlich leichter machen, wenn wir das *Erweitern* und *Kürzen* lernen. Um zu zeigen, worum es sich dabei handelt, zunächst ein paar Beispiele.

Kürzen können wir wie folgt:

$$\frac{4}{8} = \frac{1 \cdot \cancel{4}}{2 \cdot \cancel{4}} \overset{\text{Kürzen}}{=} \frac{1}{2}$$

Erweitern ist sozusagen der Gegenspieler des Kürzens:

$$\frac{3}{7} \overset{\text{Erweitern}}{=} \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

Sowohl das Erweitern als auch das Kürzen haben sinnvolle Anwendungen. Kürzen dient oft dazu, ein Ergebnis zu vereinfachen und so eine bessere Vorstellung davon zu erhalten (z.B. ist es einfacher sich 1/2 vorzustellen als 24/48). Erweitern hingegen hilft beispielsweise bei Rechnungen mit Addition und Subtraktion, wie wir im folgenden Abschnitt noch sehen werden.

1.3 Addieren und Subtrahieren

Schauen wir uns die Addition und Subtraktion in ein paar Beispielen an.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = \frac{\cancel{3}\,1}{\cancel{3}\,1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{8}{7} - \frac{3}{7} = \frac{8-3}{7} = \frac{5}{7}$$

Es stellt sich die Frage: Was machen wir, wenn die Nenner unterschiedlich sind? Hier nutzen wir die Möglichkeit des Erweiterns:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{8+15}{20} = \frac{23}{20}$$

Die einfachste Methode ist es tatsächlich, mit dem Nenner des anderen Summanden zu erweitern.

6 Flächensätze

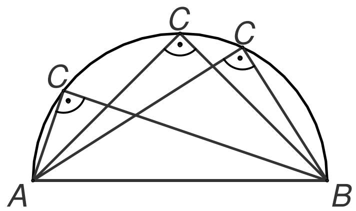
Im Laufe der Zeit haben sich bedeutende Mathematiker und Wissenschaftler damit beschäftigt, wie man innerhalb geometrischer Figuren Dinge leichter und schneller berechnen kann. Ihre Überlegungen haben sie in *Sätzen* formuliert, die wir heute anwenden, um Rechnungen durchzuführen, die nicht auf den ersten Blick zu lösen sind. Einige Sätze schauen wir uns in diesem Kapitel näher an.

6.1 Satz des Thales

Der Satz des Thales befasst sich mit rechtwinkligen Dreiecken. Ein rechtwinkliges Dreieck besteht aus einer **Hypotenuse** und zwei **Katheten**. Die Katheten sind die Seiten, die am rechten Winkel liegen. Diese bezeichnen wir mit a und b. Die Hypotenuse c ist die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt. Die Aussage ist sehr hilfreich, um rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren.

Satz des Thales

> **Satz 6.1.1** (Satz des Thales)**.** *Wir haben eine Strecke zwischen den Punkten A und B gegeben und verbinden diese mit einem Halbkreisbogen. Dann hat das Dreieck ABC für jeden Punkt C auf dem Halbkreis einen rechten Winkel an C.*



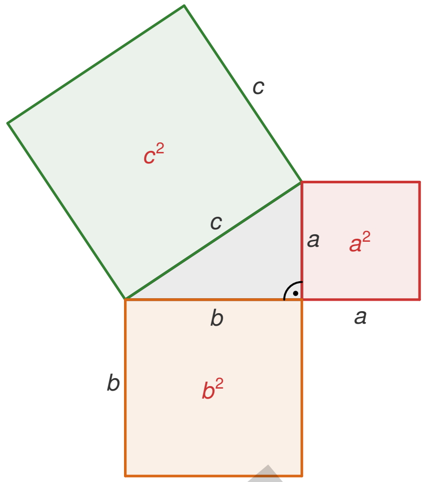
6.2 Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras ist ein wichtiger Satz der Mathematik und ein sehr nützliches Hilfsmittel. Er lautet folgendermaßen:

Satz des Pythagoras

> **Satz 6.2.1** (Satz des Pythagoras)**.** *In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, mit Katheten a und b und Hypotenuse c, gilt folgender Zusammenhang:*
>
> $$a^2 + b^2 = c^2$$

Was bedeutet das eigentlich? Im Bild sehen wir in der Mitte das rechtwinklige Dreieck. Die Quadrate, die an den Seiten des Dreiecks anliegen, haben je den Flächeninhalt a^2, b^2 und c^2.



Der Satz des Pythagoras sagt also aus, dass der Flächeninhalt des oberen linken Quadrats genauso groß ist, wie der des rechten und unteren zusammen.

Mit Hilfe dieser Formel können wir relativ leicht eine Seitenlänge des Dreiecks aus den anderen beiden bestimmen, sofern wir die Information haben, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Beispiel: Wir haben ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 7$ und $b = 3$ gegeben und wollen die Seite c bestimmen. Der Satz des Pythagoras liefert::

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 \quad |\sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad c &= \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \approx 7{,}616 \end{aligned}$$

6.3 Kathetensatz

Höhen-/ und Kathetensatz

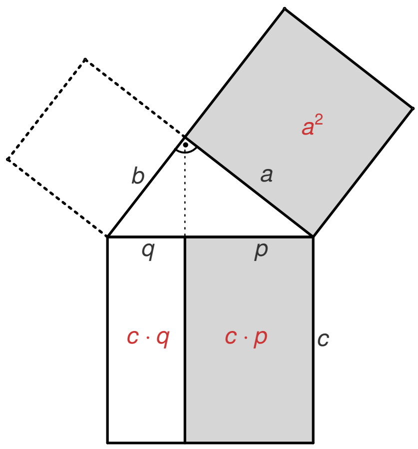
Für den Kathetensatz betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse ist durch $c = p + q$ gegeben. Die Strecken p und q erhalten wir, indem wir von dem Punkt, an dem der rechte Winkel anliegt, ein Lot auf die Seite c fällen.

Satz 6.3.1 (Kathetensatz)**.** *In dieser Situation ist die Fläche des Rechtecks mit den Seiten c und p gleich der Fläche des anliegenden Kathetenquadrats.*

$$a^2 = c \cdot p$$

Ebenso stellen wir fest, dass gilt:

$$b^2 = c \cdot q$$



11 Körperberechnungen

In diesem Kapitel wollen wir uns dreidimensionale Figuren anschauen. Oft sind wir am Volumen oder an bestimmten Flächen dieser Figuren interessiert. Obwohl es viele unterschiedliche Figuren gibt, folgt die Berechnung der Größen meist einem bestimmten Muster. Das Volumen berechnet sich zum Beispiel aus der Grundfläche und der Höhe. Oberflächen hingegen ergeben sich aus der Summe aller Teilflächen. Meist können wir einzelne Teile mit Hilfe der bereits gelernten Methoden berechnen.

Übersicht wichtiger Körper

11.1 Prismen

Ein Prisma ist eine dreidimensionale geometrische Figur. Du kannst dir vorstellen, dass wir ein Vieleck, welches hier die Grundfläche bildet, auf eine bestimmte Höhe aufziehen. Um das **Volumen** V zu bestimmen, ermitteln wir den Flächeninhalt der Grundfläche und multiplizieren diesen mit der Höhe h. Dazu nutzen wir die Flächeninhaltsformeln aus Kapitel 10.

Prismen

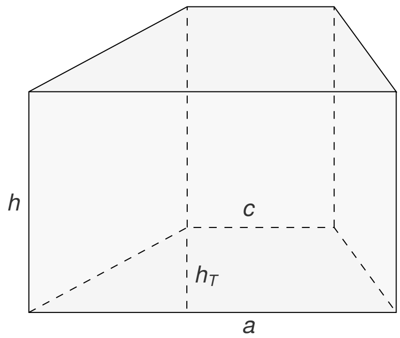
Volumen von Prismen

$$V = G \cdot h$$

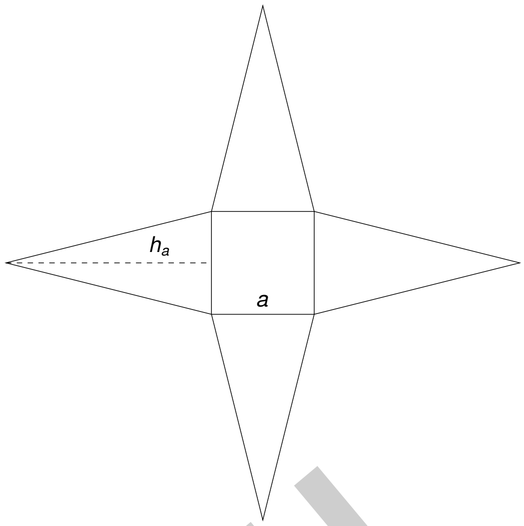
Beispiel

Wir betrachten ein Prisma mit einer trapezförmigen Grundfläche mit den parallelen Seiten $a = 5$ und $c = 3$ und der Höhe $h_T = 2$. Die Höhe des Prismas sei gegeben durch $h = 7$.

Wir berechnen das Volumen des Prismas mit Hilfe der Flächenformel für ein Trapez.



Beispiel
Gegeben sei die Pyramide aus dem vorherigen Beispiel. Die Dreiecksflächen an den Seiten der Pyramide sind alle gleich groß. Wir berechnen die Höhe dieses Dreiecks mit Hilfe des Satz von Pythagoras mit Hypotenuse h_a und den Katheten $a = 4$ und $h = 8$. Es gilt:



$$\begin{aligned} h_a &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} \text{ [LE]} \end{aligned}$$

Wir rechnen zunächst mit diesem Wert weiter, um ein genaueres Ergebnis für die Dreiecksfläche zu erhalten. Diese beträgt:

$$A_\triangle = \frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{68} \cdot 4}{2} = 2 \cdot \sqrt{68} \text{ [FE]}$$

Da alle Dreiecksflächen gleich groß sind, erhalten wir für die Mantelfläche somit:

$$M = 4 \cdot A_\triangle = 8 \cdot \sqrt{68} \approx 65{,}97 \text{ [FE]}$$

Für die Oberfläche ergibt sich damit eine Fläche von:

$$O = G + M \approx a^2 + 65{,}97 = 16 + 65{,}97 = 81{,}97 \text{ [FE]}$$

11.3 Zylinder

Zylinder und Kegel

Einen Zylinder können wir uns als ein Prisma mit kreisförmiger Grundfläche vorstellen. Daher ändert sich beim **Volumen** auch nicht viel, außer der Formel für die Grundfläche.

Volumen eines Zylinders

$$V = G \cdot h$$

Die Grundfläche G lässt sich wie zuvor bei der Flächenberechnung von Kreisen durch $G = \pi \cdot r^2$ berechnen, wobei r der Radius der Grundfläche ist und auch als Radius des Zylinders bezeichnet wird.