Inhalt

1 Teilbarkeit und Vielfache

Aus dem letzten Jahr wissen wir bereits, wie wir zwei Zahlen **dividieren** (teilen) sowie **multiplizieren** (Mal nehmen). *Teiler und Vielfache bestimmen* funktioniert sehr ähnlich.

1.1 Teiler

Wenn wir noch einmal genauer an die **Division** zurückdenken, erinnern wir uns bestimmt auch daran, dass es Ergebnisse **mit** und Ergebnisse **ohne Rest** gab. Wenn wir zum Beispiel 56 durch 5 teilen, dann lautet das Ergebnis: 11 Rest 1, da $5 \cdot 11 + 1 = 56$ ist. Der **Teiler** einer Zahl ist ein Divisor, für den kein Rest bleibt. Die 5 ist also kein Teiler von 56, da ein Rest von 1 bleibt. Aber die 2 ist zum Beispiel ein Teiler, da $56 : 2 = 28$ Rest 0.

1.1.1 Teilermenge bestimmen

Eine **Menge** können wir als eine Zusammenfassung von mehreren Elementen, in unserem Fall Zahlen, verstehen. Die **Teilermenge** $\mathcal{T}$ umfasst also alle Teiler einer Zahl. Wir schreiben Teilermengen mit geschwungenen Klammern, zwischen denen alle Teiler stehen.

Teilermenge bestimmen

Beispiel 1.1 *Wir betrachten einmal die Zahl* 6 *und wollen die Teilermenge bestimmen. Dafür fangen wir vorne an und arbeiten uns Schritt für Schritt bis zu der* 6 *selbst weiter vor.*

- *Ist die* 1 *ein Teiler?* → *Ja, denn* $6 : 1 = 6$ *Rest* 0
- *Ist die* 2 *ein Teiler?* → *Ja, denn* $6 : 2 = 3$ *Rest* 0
- *Ist die* 3 *ein Teiler?* → *Ja, denn* $6 : 3 = 2$ *Rest* 0
- *Ist die* 4 *ein Teiler?* → *Nein, denn* $6 : 4 = 1$ *Rest* 2
- *Ist die* 5 *ein Teiler?* → *Nein, denn* $6 : 5 = 1$ *Rest* 1

- *Ist die* 6 *ein Teiler?* $\rightarrow$ *Ja, denn* $6 : 6 = 1$ *Rest* 0

Somit können wir die Teilermenge schreiben als: $\mathcal{T}_6 = \{1; 2; 3; 6\}$.

> **Die Quersumme** einer Zahl ist die Summe jeder einzelnen Ziffer, aus der diese Zahl besteht. Für eine 67 würden wir also 6 + 7 rechnen. Diesen Trick werden wir gleich noch nutzen, da die Quersumme uns einiges über die Zahl selbst verraten kann!

Für die Zahl 6 ist es natürlich kein Problem, bei 1 anzufangen und hoch zu zählen um alle Teiler zu finden, aber was würden wir für die 56 tun? Hierfür gibt es ein paar nützliche Tricks!

> Jede positive, ganze Zahl wie 1, 2, 3, 4, ...
>
> - ... ist durch 1 teilbar.
> - ... ist durch sich selbst teilbar (z.B. 56 : 56 = 1 Rest 0).
> - ... die gerade ist, ist durch 2 teilbar.
> - ... deren Quersumme durch 3 teilbar ist, ist auch durch 3 teilbar.
> - ... deren zwei letzte Ziffern durch 4 teilbar sind, ist auch durch 4 teilbar.
> - ... die auf 0 oder 5 endet, ist durch 5 teilbar.
> - ... die durch 2 **und** 3 teilbar ist, ist auch durch 6 teilbar.
> - ... deren letzten drei Ziffern durch 8 teilbar sind, ist auch durch 8 teilbar.
> - ... deren Quersumme durch 9 teilbar ist, ist auch durch 9 teilbar.
> - ... die auf 0 endet, ist durch 10 teilbar.

Auch für die 7 gibt es verschiedene Tricks, die allerdings relativ lang und nicht unbedingt einfacher sind. In diesem Fall testen wir also einfach, ob die Zahl ohne Rest durch sieben teilbar ist. Weiterhin, können wir durch den Quotienten auf weitere Teiler schließen. Wir wissen zum Beispiel, dass 4 ein Teiler von 56 ist, da 56 : 4 = 14 Rest 0. Umgekehrt wissen wir somit, dass 14 ein Teiler von 56 ist, da 56 : 14 = 4 Rest 0. Bestimmen wir einmal gemeinsam die komplette Teilermenge von 56:

Beispiel 1.2

1. $\mathcal{T}_{56} = \{\}$.
2. *Die* 1 *gehört immer zur Teilermenge einer ganzen Zahl* $\rightarrow \mathcal{T}_{56} = \{1\}$
3. *Jede Zahl ist durch sich selbst teilbar* $\rightarrow \mathcal{T}_{56} = \{1; 56\}$
4. *Die* 56 *ist eine gerade Zahl, also ist die* 2 *auch ein Teiler* $\rightarrow \mathcal{T}_{56} = \{1; 2; 56\}$
5. $56 : 2 = 28$ *Rest* 0 *also* $56 : 28 = 2$ *Rest* $0 \rightarrow \mathcal{T}_{56} = \{1; 2; 28; 56\}$
6. $5 + 6 = 11$ *und* $11 : 3 = 3$ *Rest* 2*, die* 3 *ist somit* ***kein*** *Teiler.*
7. $56 : 4 = 14$ *Rest* $0 \rightarrow \mathcal{T}_{56} = \{1; 2; 4; 28; 56\}$
8. $56 : 4 = 14$ *Rest* 0 *also* $56 : 14 = 4$ *Rest* $0 \rightarrow \mathcal{T}_{56} = \{1; 2; 4; 14; 28; 56\}$
9. *Da* 56 *nicht auf* 0 *oder* 5 *endet, ist die* 5 ***kein*** *Teiler.*
10. *Die* 2 *ist ein Teiler, aber die* 3 *nicht, also ist auch die* 6 ***kein*** *Teiler.*
11. $56 : 7 = 8$ *Rest* $0 \rightarrow \mathcal{T}_{56} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28; 56\}$
12. $56 : 7 = 8$ *Rest* 0 *also* $56 : 8 = 7$ *Rest* $0 \rightarrow \mathcal{T}_{56} = \{1; 2; 4; 7; 8; 14; 28; 56\}$
13. *Die Quersumme* 11 *ist nicht ohne Rest durch* 9 *teilbar, somit ist die* 9 ***kein*** *Teiler von* 56*.*
14. *Da* 56 *nicht auf* 0 *endet, ist die* 10 ***kein*** *Teiler.*

Als Teilermenge von 56 *ergibt sich somit:* $\mathcal{T}_{56} = \{1; 2; 4; 7; 8; 14; 28; 56\}$

> **Funfact:** Wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist, ist auch die Quersumme der Quersumme durch 3 teilbar! Probiert das doch mal mit 93 aus. Das gleiche gilt auch für die Quersumme und die 9.

Aufgabe 1.1.1 *Entscheide im Folgenden ob die Aussagen wahr, oder falsch sind. Begründe basierend auf den oben gelernten Tricks.*

a) 64 *ist durch* 2 *teilbar.*
b) 26 *ist durch* 4 *teilbar.*
c) 36 *ist durch* 3 *teilbar.*
d) 28 *ist durch* 6 *teilbar.*
e) 12 *ist durch* 5 *teilbar.*
f) 72 *ist durch* 9 *teilbar.*
g) 58 *ist durch* 8 *teilbar.*
h) 87 *ist durch* 3 *teilbar.*

Aufgabe 1.1.2 *Finde den Fehler in folgenden Teilermengen:*

a) $\mathcal{T}_{15} = \{1; 3; 5; 8; 15\}$
b) $\mathcal{T}_{14} = \{1; 2; 14\}$
c) $\mathcal{T}_{28} = \{2; 4; 7; 14\}$

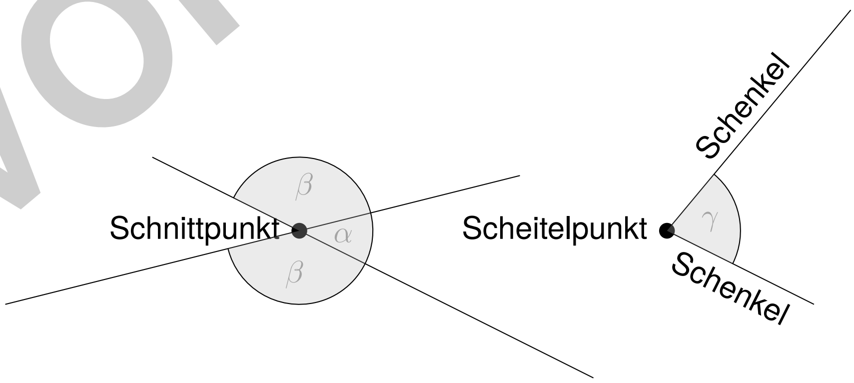
5 Winkel und Kreise

In diesem Kapitel wollen wir Winkel und Kreise genauer kennenlernen. Winkel begegnen uns überall im Alltag: Dächer neigen sich in einem bestimmten Winkel, damit das Wasser abfließen kann, Flugzeuge starten und landen in einem bestimmten Winkel und wenn wir ein Regal anbringen, dann sollte es in einem rechtem Winkel zur Wand stehen, weil sonst alles runter fällt.

Ein Winkel entsteht also, wenn sich **zwei Geraden schneiden**. An dem Schnittpunkt entstehen vier Winkel, von denen zwei gegenüberliegende jeweils gleich sind. Ein Winkel kann auch entstehen, wenn **zwei Strahlen sich treffen**. Der Ausgangspunkt ist dann der **Scheitelpunkt** des Winkels und die beiden Strahlen nennen wir **Schenkel**.

Einführung Winkel

> Winkel werden meisten mit kleinen griechischen Buchstaben beschrieben. Wichtig sind vor allem:
>
> 1. alpha: α 2. beta: β 3. gamma: γ 4. delta: δ 5. epsilon: ϵ

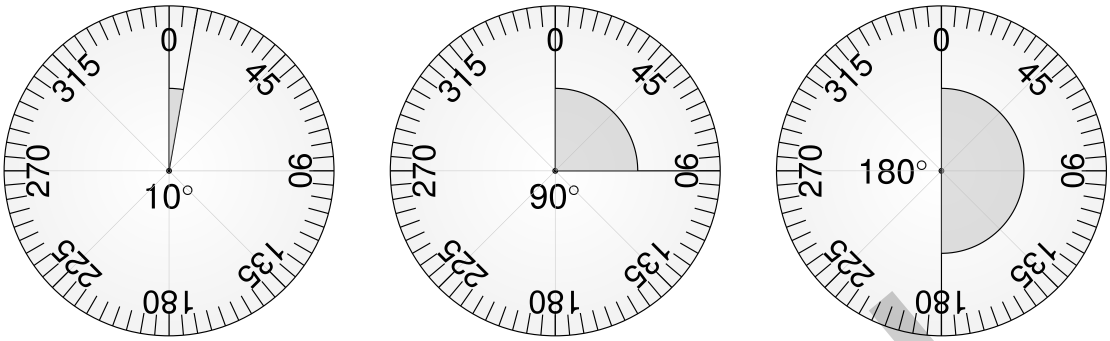


5.1 Winkelarten

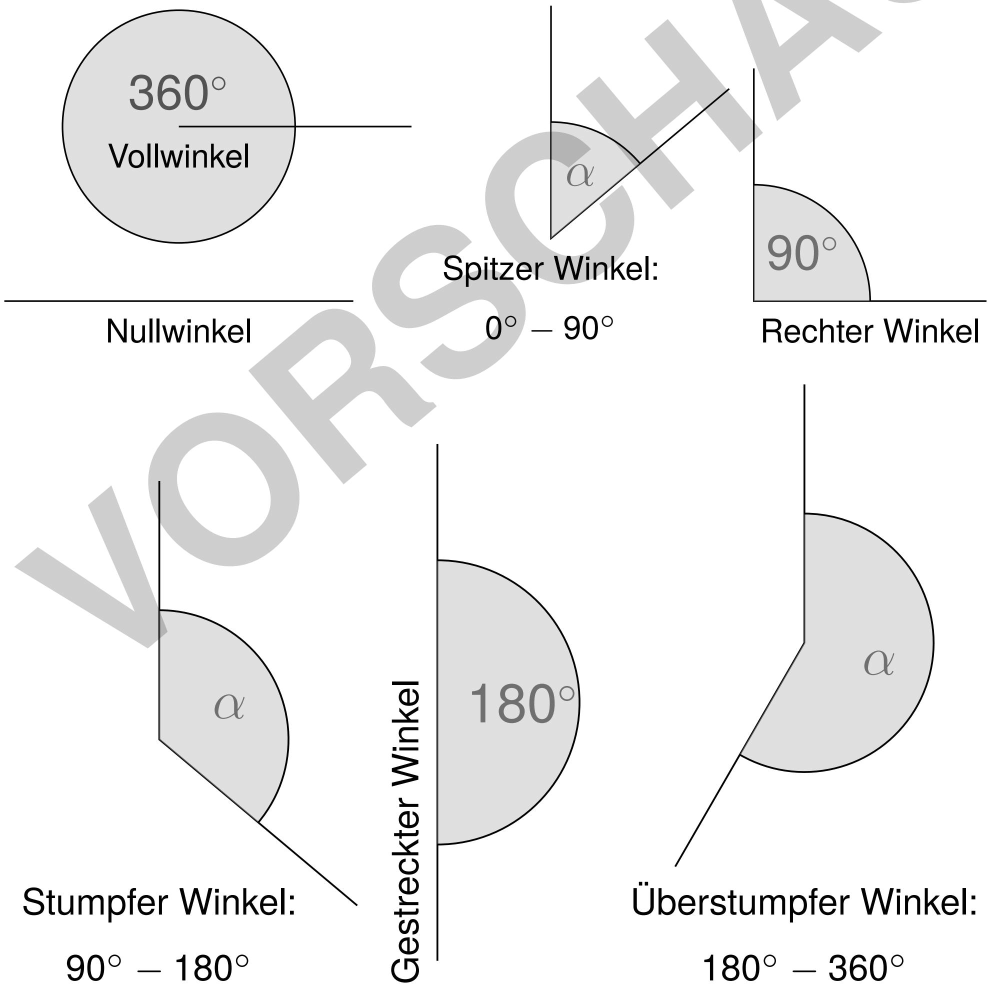
Winkel werden in Grad ° angegeben mit Gradzahlen zwischen 0° und 360°. Wenn ein Winkel 0° hat, dann existiert kein Winkel und bei 10° haben wir nur einen kleinen Winkel. Einen **rechten Winkel** haben wir bei 90°, bei 180° liegt eine Gerade vor und bei 360° haben wir einen Kreis. In der obigen Abbildung links sehen wir, dass die beiden Winkel α und β zusammen einen 180°-Winkel ergeben, also eine

Winkelarten

Gerade. Wir nennen α und β somit auch **Nebenwinkel**. Die beiden β-Winkel sind gleich groß, deswegen dürfen wir sie auch gleich benennen. Wir bezeichnen die beiden auch als **Scheitelwinkel**, da sie sich quasi am Scheitelpunkt gegenüberstehen und gleich groß sind.



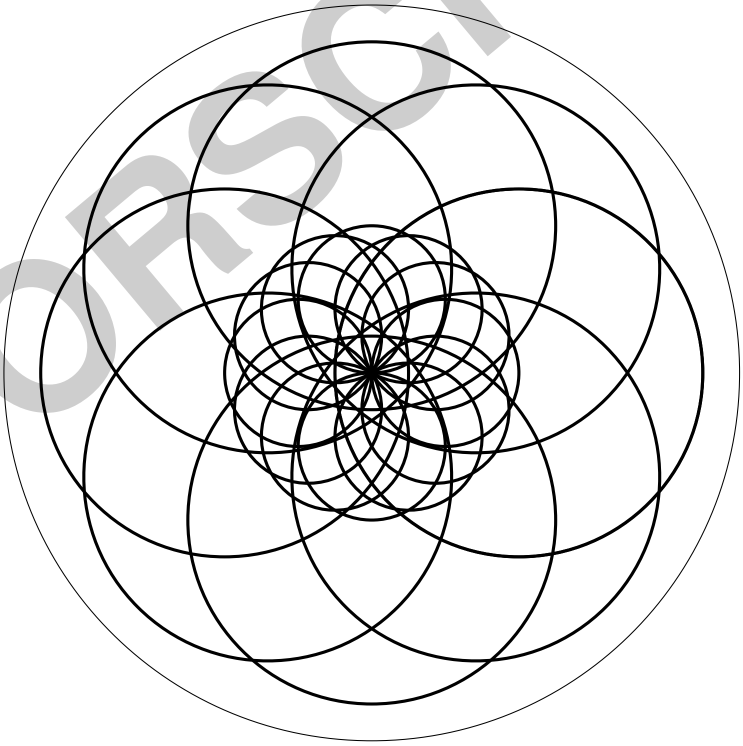
Winkelarten unterscheiden wir danach, wie weit sie geöffnet sind. Somit gibt es Namen für Winkel, die zwischen oder bei bestimmten Gradzahlen liegen:

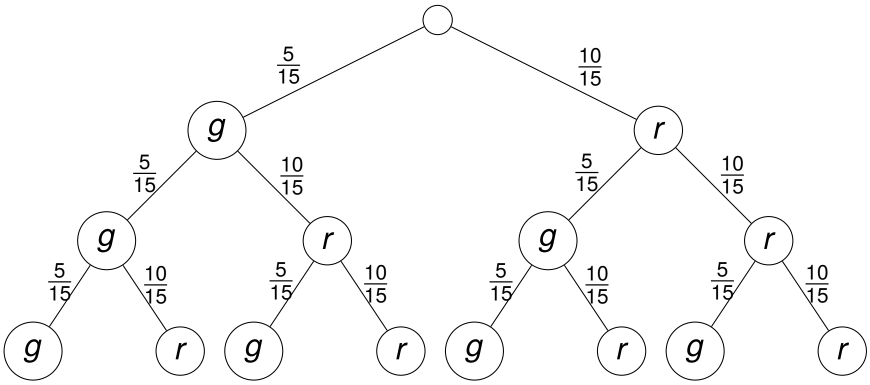


Jeder Punkt des Kreises ist gleich weit vom Mittelpunkt *M* entfernt. Der Radius *r* gibt die Strecke zwischen Mittelpunkt und Rand an, also wie weit die Punkte von *M* entfernt sind. Der Durchmesser erstreckt sich von einem Rand des Kreises zum anderen und durchschneidet dabei den Mittelpunkt. Der Durchmesser *d* ist also das Doppelte vom Radius und beschreibt, wie weit zwei Punkte maximal voneinander entfernt sein können.

$$d = 2 \cdot r \text{ somit } r = d : 2$$

Einen Kreis zeichnet man immer mit einem Zirkel. Als erstes stellen wir den Radius auf dem Zirkel ein, indem wir die Spitze des Zirkels auf die 0 des Geodreiecks oder Lineals stellen und dann den Zirkel soweit aufdrehen, dass die Bleistiftspitze genau auf die Zahl zeigt, die der Radius sein soll. Dann stechen wir die Spitze in den Mittelpunkt des Kreises und zeichnen einmal eine Runde. Dabei müssen wir allerdings gut aufpassen, dass der Zirkel sich nicht weiter öffnet oder schließt während wir zeichnen. Wichtig hierbei ist, dass wir immer den Radius des Kreises am Zirkel einstellen. Wenn nur der Durchmesser gegeben ist, müssen wir den Radius mit der Formel oben ausrechnen. Am besten probierst du es Mal ein paar Kreise mit verschiedenen Radien und Durchmessern zu zeichnen.





Die Wahrscheinlichkeit drei rote Kugeln zu ziehen ist:

$$\frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} = \frac{1000}{3375} = \frac{8}{27} = 29{,}6\%$$

Die Wahrscheinlichkeit drei grüne Kugeln zu ziehen ist:

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{125}{3375} = \frac{1}{27} = 3{,}70\%$$

Die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei grüne Kugeln zu ziehen ist:

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = 25{,}02\%$$

Aufgabe 8.4.1 *Sergej zieht drei-Mal hintereinander jeweils eine Spielkarte aus einem Kartenblatt wie in Aufgabe 8.2.1 und mischt diese nach dem Anschauen wieder ins Deck.*

a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nur rote Karten gesehen hat?*

b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens zwei schwarze Karten gezogen hat?*

c) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Kreuz-Sieben gesehen hat?*

Überlegt genau, für was ihr ein Baumdiagramm braucht und welche Informationen ihr darstellen müsst!

Aufgabe 8.4.2 *Christoph fährt nach der Arbeit immer mit dem Zug nach Hause. Dort trifft er mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% Karli und mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% trifft er Petra. Vor dem Einsteigen denkt er sich: „Laut der Summenregel werde ich wohl wenigstens einen der beiden mit einer Wahrscheinlicheit von 125% treffen.“ Kann die Wahrscheinlichkeit höher als 100% sein? Und beim Aussteigen hat er noch weder Karli oder Petra gesehen. Wo denkt Christoph falsch?*