Inhalt

Seite

Vorwort 4

1 **Die unendliche Geschichte** 5–6
Vorstellung der Menschen vom Unendlichen 5–6

2 **Begriffe rund um die Unendlichkeit** 7

3 **Endlich oder ohne Ende?** 8–9

4 **Im Land der großen Zahlen** 10–12
4.1 Von der Mücke zum Elefanten – groß aber endlich groß 10–11
4.2 Unendlich groß 12

5 **Im Land der kleinen Zahlen** 13–17
5.1 Von der Mücke zum Atom – klein aber endlich klein 13–15
5.2 Unendlich klein 16–17

6 **Allgemeine Zahlenfolgen** 18

7 **Eine spezielle Zahlenfolge: Die Fibonacci-Folge** 19–23

8 **Arithmetische Folgen** 24

9 **Partialsummenfolgen** 25

10 **Die Formel von Gauß** 26

11 **Geometrische Folgen** 27

12 **Arithmetische und geometrische Folgen** 28

13 **Durch Papierfalten bis zum Mond** 29

14 **Legende von der Erfindung des Schachspiels** 30

15 **Der Grenzwert von Zahlenfolgen** 31–34

16 **Der Begriff „Limes“ und das Unendlichkeitssymbol** 35

17 **Summenfolgen mit und ohne Grenzwert** 36–40

18 **Fragen nach der Unendlichkeit in der Antike** 41–42

19 **Rätsel um Achilles – griechische Mythologie** 43–44

20 **Paradoxon: Wettlauf des Achilles mit einer Schildkröte** 45–48

21 **Rechnen mit unendlich kleinen Größen** 49–50
Ausblick auf die Infinitesimalrechnung 49–50

22 **Lösungen** 51–67

VORSCHAU

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

netzwerk lernen

zur Vollversion

Vorwort

Bis zum Verständnis der Infinitesimalrechnung in der gymnasialen Oberstufe führt ein langer Weg, der seinen Ursprung bereits in der Neugier jüngerer Schüler nach dem Unendlichen hat. „Wie lange dauert eine Ewigkeit?“ „Ist das Weltall unendlich groß?“ „Wie heißt die größte Zahl?“

Wie oft hören Eltern und Lehrer diese Fragen und wie oft fallen die Antworten knapp aus.

Gelingt es jedoch, die Beschäftigung der Kinder mit dieser Problematik in einer dem Alter angemessenen Form zu fördern, können so im Ansatz Grundlagen für das Verständnis weltanschaulicher und mathematischer Denkweisen gelegt werden und der Übergang zur Auseinandersetzung mit der Oberstufenmathematik erleichtert werden.

Das vorliegende Material soll einen Beitrag dazu leisten.

Ausgehend von der Erfahrungswelt der Schüler wie beispielsweise der Frage nach der Zahl der Körner in einer Sanduhr oder dem Brauch des „Schafe zählens“ vor dem Einschlafen bis hin zu Fragen nach der Unendlichkeit des Kosmos und der Teilbarkeit der Körper finden sich auf den ersten Seiten dieses Heftes Texte, Aufgaben und Rätsel zur allgemeinen Problematik der Unendlichkeit.

Die Schüler werden weiterhin mit Beispielen für sehr große – aber endlich große – und sehr kleine – aber endlich kleine – Größen und Zahlen bekanntgemacht und mit Beispielen dafür sensibilisiert, dass man unter „Unendlich groß“ keine Zahl, sondern einen Prozess „des immer weiter Zählens“ und unter „Unendlich klein“ einen Prozess „des immer weiter Teilens“ verstehen kann.

Ein Blick in die Geschichte der Mathematik zeigt den Schülern, dass sich Forscher seit der Antike mit der Problematik des Unendlichen beschäftigten. Ausführlich wird Zenons Paradoxon von Achilles und der Schildkröte vorgestellt.

Den Schwerpunkt des Heftes bilden vielfältige Aufgaben zu Zahlen- und Partialsummenfolgen (Reihen) beginnend mit Zahlenreihen, in welchen fehlende Zahlen zu ergänzen sind. Rätsel oder die Suche nach einem Bildungsgesetz kommen als Strategien zum Lösen der Aufgaben infrage. Historische Beispiele wie die Fibonacci-Folge und die Legende von der Erfindung des Schachspieles sind mit Texten und entsprechenden Aufgaben eingebunden.

Interessant wird es dann, wenn endlos viele Folgenglieder addiert werden und dennoch die Summe einen endlichen Wert – den Grenzwert – nicht überschreitet.

Der Ausblick auf das Rechnen mit unendlich kleinen Größen, was in der Antike nicht gelang, aber seit dem Wirken von Leibnitz und Newton, die als Begründer der Infinitesimalrechnung gelten, möglich wurde, rundet das Material ab, welches sowohl zur Ergänzung im Unterricht der Mittelstufe, in Freiarbeit, zur Vorbereitung auf die Einführung der Analysis in der Oberstufe oder aber auch als häusliche Lektüre für interessierte Schüler eingesetzt werden kann.

In diesem Sinne viel Erfolg bei der Beschäftigung mit dem „Unendlichen“
wünschen das Team des Kohl-Verlags und

Barbara Theuer

VORSCHAU

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

1 Die unendliche Geschichte

Vorstellung der Menschen vom Unendlichen

Aus den Mythen

- **Sisyphos**

Sisyphos soll um das Jahr 1400 v. Chr. gelebt haben. Heute ist er vor allem als eine Figur der griechischen Mythologie bekannt. In der Sage werden Sisyphos Weisheit und große Verdienste als König von Korinth zugeschrieben. Sisyphos galt aber auch als ein die Götter verachtender Frevler, was wohl einer der Gründe war, um von Hermes in die Unterwelt verbannt zu werden. Dort musste er zur Strafe für seine Frevel einen Felsblock auf einen Berg hinaufwälzen, der, wenn er fast den Gipfel erreicht hatte, jedes Mal wieder ins Tal rollte; sodass Sisyphos mit seiner Arbeit wieder von vorne beginnen musste – eine ewig währende Strafe.
Der Grundgedanke der Sisyphos-Sage lebt in dem geflügelten Wort „Sisyphos-Arbeit“ noch heute, denn damit bezeichnet man eine Aufgabe, die trotz großer Mühen in endlicher Zeit niemals abgeschlossen werden kann.

- **Achilles und die Schildkröte**

Der antike griechische Philosoph Zenon von Elea (490 v. Chr. bis 430 v. Chr.) beschäftigte sich unter anderem mit der Frage, ob die Welt in diskrete Einheiten zerlegbar ist, es also Teilbarkeit gibt, oder ob die Welt eine kontinuierliche Einheit bildet. Die Annahme von Teilbarkeit führte zu dem Problem, dass entweder alles unendlich teilbar ist oder aber es letzte Elementarquanten von Raum und Zeit geben muss. Zenon beschreibt in einem seiner Paradoxa einen unendlich währenden fiktiven Wettlauf zwischen Achilles, den Homer in der Ilias als nahezu unverwundbaren, mutigen, starken und schnellen Heros beschreibt, und einer Schildkröte. Das Paradoxe besteht darin, dass der schnelle Achilles die langsame Schildkröte niemals einholt, da diese mit einem Vorsprung gestartet ist; und immer, wenn Achilles, der zehnmal schneller ist als die Schildkröte, den Vorsprung der Schildkröte bewältigt hat, ist die Schildkröte um den zehnten Teil ihres bisherigen Vorsprungs weitergelaufen – der Wettlauf dauert nach Zenon folglich ewig.

VORSCHAU

Aufgabe 1: *Kennst du weitere Beispiele, in denen die Unendlichkeit in Mythen, Märchen und Geschichten eine Rolle spielt? Notiere deine Antwort in Stichpunkten.*

_____

_____

Aufgabe 2: *Welches andere Wort wird in den Texten oben anstatt „unendlich“ verwendet? Welche Größe wird in den Mythen von Sisyphos und Achilles unendlich groß?*

_____

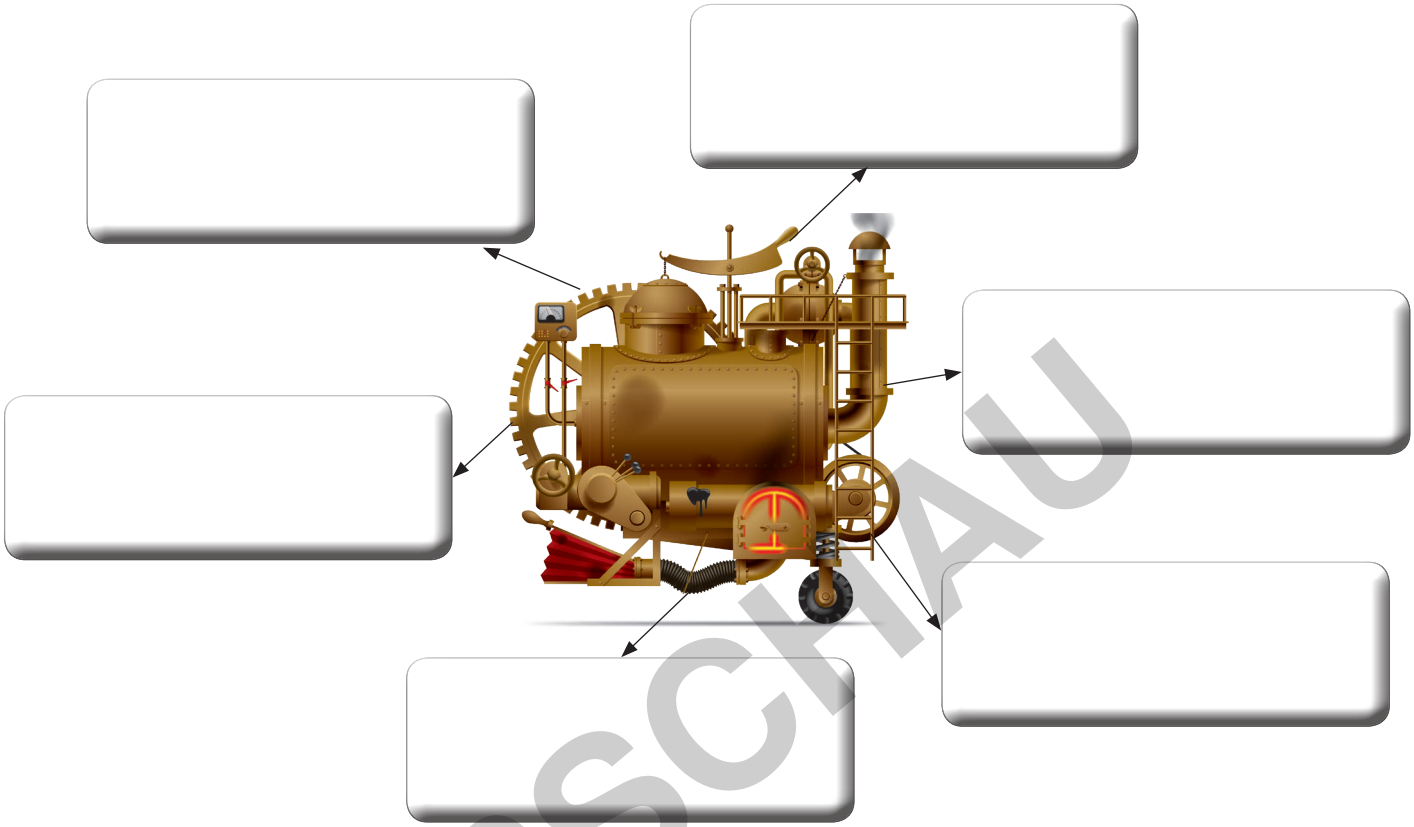
Tipp: Interessantes und Aufgaben zur Berechnung der Wegstrecke, die Achilles laufen muss, bis er die Schildkröte eingeholt hat, findest

netzwerk lernen
zur Vollversion

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

1 Die unendliche Geschichte

Aufgabe 3: *Im Traum arbeitest du als Wissenschaftler an einem Projekt zur Verbesserung der Energiesituation auf der Welt. Zu diesem Zweck sind neuartige Fahrzeuge und Maschinen zu konstruieren.*
Lass deine Phantasie spielen und notiere deine Wunschvorstellungen von den Eigenschaften solcher Vorrichtungen.



VORSCHAU

Aus der Naturwissenschaft

Das Perpetuum mobile

Ein *Perpetuum mobile* (lat.: sich ständig Bewegendes) erster Art ist ein hypothetisches Gerät, welches – einmal in Gang gesetzt – ohne weitere Energiezufuhr ewig in Bewegung bleibt und dabei möglicherweise auch noch Arbeit verrichtet, was mit der Abgabe von Nutzenergie verbunden ist. Die Abgabe von Nutzenergie ohne Zufuhr einer gleichwertigen Energiemenge in anderer Form widerspricht drastisch dem Energieerhaltungssatz. Selbst wenn keine Nutzenergie mit dem „Perpetuum mobile“ gewonnen wird, verhindern versteckte Energieumwandlungen (beispielsweise durch Reibung) den ewigen Dauerbetrieb.
Die Idee eines Perpetuum mobile 2. Art ist es, aus Umgebungswärme Arbeit zu gewinnen. Das heißt, die durch örtliche Abkühlung gewonnene Wärme soll komplett in mechanische Arbeit umgesetzt werden. Das ist nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht möglich.

Aufgabe 4: *Wie lässt sich eine relativ lange Laufzeit mechanischer Geräte ermöglichen?*

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

2 Begriffe rund um die Unendlichkeit

Oft begegnen uns in wissenschaftlichen Sendungen, Zeitungsartikeln oder utopischen Filmen Begriffe zum Thema der Unendlichkeit, die wir nur annähernd deuten können, die uns aber weitere Fragen und Rätsel zu diesem interessanten Thema aufgeben. Wir wollen deshalb hier zunächst einige Begriffe zu dieser Problematik zusammentragen.

Aufgabe 1: *In dem abgebildeten kosmischen Buchstabennebel findest du waagerecht und senkrecht Wörter, die mit „unendlich“ in Zusammenhang gebracht werden können. Markiere die entsprechenden Felder und schreibe die Wörter auf.*

W	A	F	F	E	L	X	M	A	S	L	D	A	Z	U	G	Y	T	G
E	G	O	B	E	W	I	G	K	E	I	T	B	A	R	H	X	F	A
R	M	O	N	D	E	Q	I	A	N	M	P	S	H	Y	A	D	R	L
S	J	E	N	D	L	O	S	P	E	E	K	K	L	E	I	N	A	A
C	A	Z	E	I	T	K	S	O	P	S	G	L	E	Y	O	M	N	X
H	C	V	B	M	A	I	T	L	T	U	W	I	N	Z	I	G	K	I
U	R	K	N	A	L	L	R	D	U	V	E	N	U	S	N	R	F	E
L	A	Q	W	R	L	T	A	A	N	R	I	Z	L	P	K	O	U	P
E	U	J	C	S	N	E	H	X	A	S	T	E	R	N	E	S	R	L
A	M	F	I	Z	A	H	L	E	N	S	A	T	U	R	N	S	T	U
U	D	A	S	Y	M	P	T	O	T	E	F	E	R	I	E	N	A	T
S	U	N	A	U	F	H	O	E	R	L	I	C	H	U	L	A	G	O

(ß = SS, Ö = OE)

Waagerecht: _____

_____

_____

Senkrecht: _____

_____

_____

Aufgabe 2: *Ergänze weitere Begriffe zum Thema „unendlich“.*

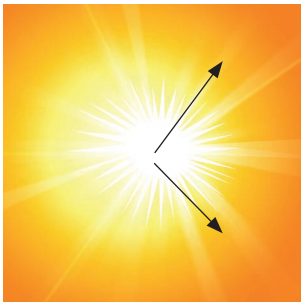
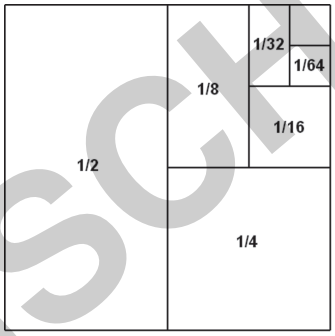
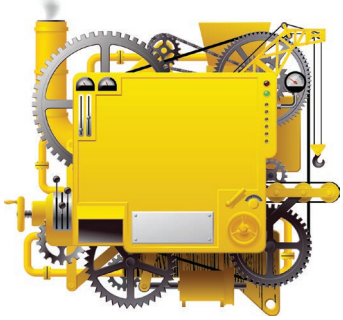
UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK – Bestell-Nr. P12 315
Rechnen mit ∞
KOHL VERLAG

netzwerk lernen

zur Vollversion

3 Endlich oder ohne Ende?

Aufgabe 1: *Welche Abbildungen beschreiben nach deiner Meinung das Phänomen „unendlich“?*

A Sanduhr	**B** Strahl als geometrisches Objekt 	**C** Periodischer Dezimalbruch $\frac{1}{3} =$ 0,33333333...
D Unendlichkeitssymbol	**E** Fortlaufende Halbierung 	**F** Perpetuum mobile 
G Schafe zählen	**H** Ozean	**I** Kosmos

Aufgabe 2: *Beschreibe eins der oben angegebenen Beispiele, für welches der Begriff „unendlich“ passt, ausführlich.*

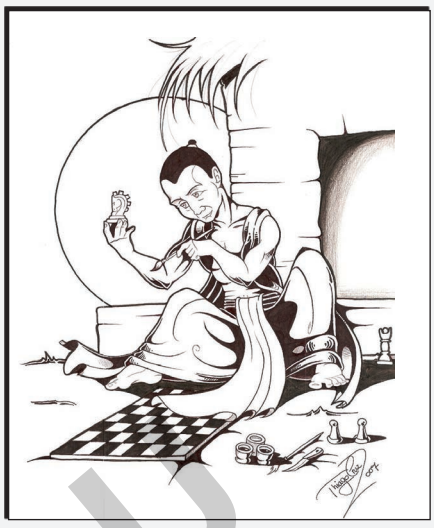
VORSCHAU

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

14 Legende von der Erfindung des Schachspiels

Aus dem Geschichtsbuch der Mathematik



Der indische Herrscher Shihram tyrannisierte seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend. Um die Aufmerksamkeit des Königs auf seine Fehler zu lenken, ohne seinen Zorn zu entfachen, schuf Dahirs Sohn, der weise Brahmane Sissa, ein Spiel, in dem der König als wichtigste Figur ohne Hilfe anderer Figuren und Bauern nichts ausrichten kann. Der Unterricht im Schachspiel machte auf Shihram einen starken Eindruck. Er wurde milder und ließ das Schachspiel verbreiten, damit alle davon Kenntnis nähmen. Um sich für die anschauliche Lehre von Lebensweisheit und zugleich Unterhaltung zu bedanken, gewährte er dem Brahmanen einen freien Wunsch. Dieser wünschte sich Weizenkörner: Auf das erste Feld eines Schachbrettes wollte er ein Korn, auf das zweite Feld das Doppelte, also zwei, auf das dritte wiederum die doppelte Menge, also vier und so weiter. Der König lachte und war gleichzeitig erbost über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, musste er hören, dass die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet hätten. Der Vorsteher der Kornkammer meldete nach mehreren Tagen ununterbrochener Arbeit, dass er diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen könne. Auf allen 64 Feldern eines Schachbretts zusammen wären es 2^{64}-1 oder 18.446.744.073.709.551.615 (≈ 18,45 Trillionen) Weizenkörner. Nun stellte er sich die Frage, wie das Versprechen eingelöst werden könne. Der Rechenmeister half dem Herrscher aus der Verlegenheit, indem er ihm empfahl, er solle Sissa ibn Dahir ganz einfach das Getreide Korn für Korn zählen lassen.*

(Es existieren alternative Erzählweisen, wonach es sich anstatt um Weizenkörner um Reiskörner gehandelt habe.)

* *Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Sissa_ibn_Dahir*

VORSCHAU

Aufgabe 1: **a)** *Du benötigst ein Schachbrett, Reiskörner und eine Pinzette. Lege nach Sissas Vorschrift Reiskörner auf die ersten fünf Felder des Schachbretts.*

b) *Berechne dann die Summe aller Reiskörner, die auf den ersten fünf Feldern liegen. Beschreibe die Rechnung mit einem Term unter Verwendung von Potenzen der Zahl 2.*

c) *Wie viele Reiskörner liegen auf den ersten 10 Feldern?*

d) *Beschreibe die Summe der Reiskörner auf allen Feldern des Schachbretts unter Nutzung des Summenzeichens.*

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

15 Der Grenzwert von Zahlenfolgen

Aufgabe 1: *Gib die Zahlenfolge an, welche den fortlaufenden Teilungsprozess (Teilen im Sinne von Halbieren) eines Gegenstandes, zum Beispiel eines Blattes Papier, abstrakt mathematisch beschreibt.*

a) – *Notiere zunächst die ersten zehn Folgenglieder.*
– *Gib das Bildungsgesetz für das n-te Folgenglied a_n als Funktion von n bei der (n-1)-ten Teilung an.*

Tipp: 1. Folgenglied = ganzes Blatt; 2. Glied = 1. Halbierung

_____

_____

_____

b) *Wie viele Folgenglieder gehören zu dieser Zahlenfolge? Welchem Wert nähern sich die Folgenglieder für wachsendes n an?*

_____

_____

Aufgabe 2: – *Nimm Stellung zu der Aussage* $\sqrt[n]{n} = 1$.

– *Betrachte die Folge* $a_n = \sqrt[n]{n}$; $n \geq 2$ *und berechne einige Folgenglieder, insbesondere für großes n. Notiere die Ergebnisse auf vier Stellen genau.*

$a_2 \approx$ _____; $a_3 \approx$ _____; $a_4 \approx$ _____; $a_5 \approx$ _____;

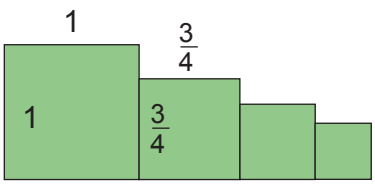
$a_{10} \approx$ _____; $a_{100} \approx$ _____; $a_{1000} \approx$ _____; $a_{10\,000} \approx$ _____;

– *Zu welcher Erkenntnis kommst du?*

_____

Aufgabe 3: *Eine Treppe wird aus den unten abgebildeten Quadraten nach der folgenden Vorschrift gebildet:*

Das erste Quadrat besitzt die Seitenlänge 1. Die Seitenlänge jedes weiteren Quadrates beträgt $\frac{3}{4}$ *der Seitenlänge des jeweiligen Vorgängerquadrates.*
Ist der Treppenbau ein endlicher Prozess? Welchen Wert überschreitet die Treppenlänge nicht?



…. *usw.*

Tipp: Zeichne eine Gerade über die Stufenecken und e

VORSCHAU

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

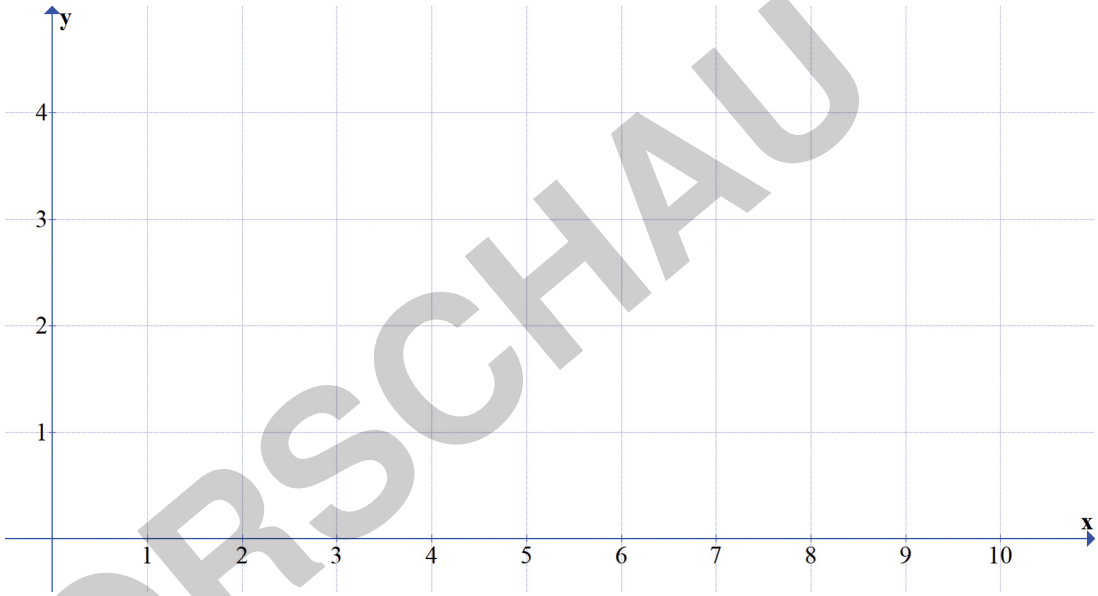
netzwerk lernen
zur Vollversion

15 Der Grenzwert von Zahlenfolgen

Aufgabe 4: *Untersuche das Verhalten der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n+1}{n}$ für wachsende Indexzahl n.*

a) *Berechne dazu mindestens die ersten zehn Folgenglieder und formuliere eine Vermutung.*

b) *Stelle die Folgenglieder a_n als Funktion von n ($n \in \mathbb{N}$) als Punktmenge in einem Diagramm dar.*



VORSCHAU

c) *Welche Grenze wird vermutlich von den Punkten (n / a_n) nicht überschritten? Zeichne die entsprechende Grenzlinie in das Koordinatensystem und gib die Funktionsgleichung dieser Geraden an.*

d) *Ab dem wievielten Folgenglied ist der Abstand der Folgenglieder von dieser Grenzlinie kleiner als 0,2 (0,1 bzw. 0,01)?*

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

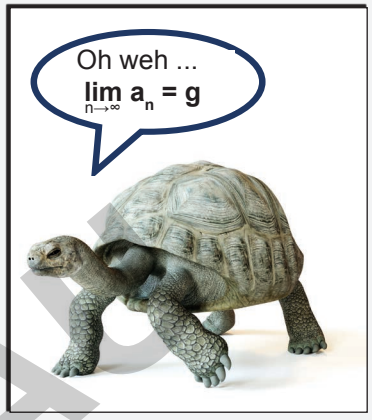
netzwerk lernen
zur Vollversion

15 Der Grenzwert von Zahlenfolgen

Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge

Der Grenzwert oder Limes einer Folge ist eine reelle Zahl g, der sich die Glieder der Folge mit wachsender Indexzahl beliebig genau nähern.
Dies bedeutet, dass in jeder – auch noch so kleinen – Umgebung ε des Grenzwerts fast alle Folgenglieder der Folge liegen.
Besitzt eine Folge solch einen Grenzwert, so wird sie konvergent – anderenfalls divergent – genannt.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$



Obwohl die Probleme der unendlichen Teilung und der unendlichen Annäherung an ein Ziel bereits Gegenstand in der antiken Philosophie und Mathematik waren – siehe Zenons Paradoxon von Achilles und der Schildkröte – , stand damals der Grenzwertbegriff noch nicht zur Verfügung.

Der Grenzwertbegriff wurde in seiner modernen Form erstmals von dem französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789 bis 1857) definiert.

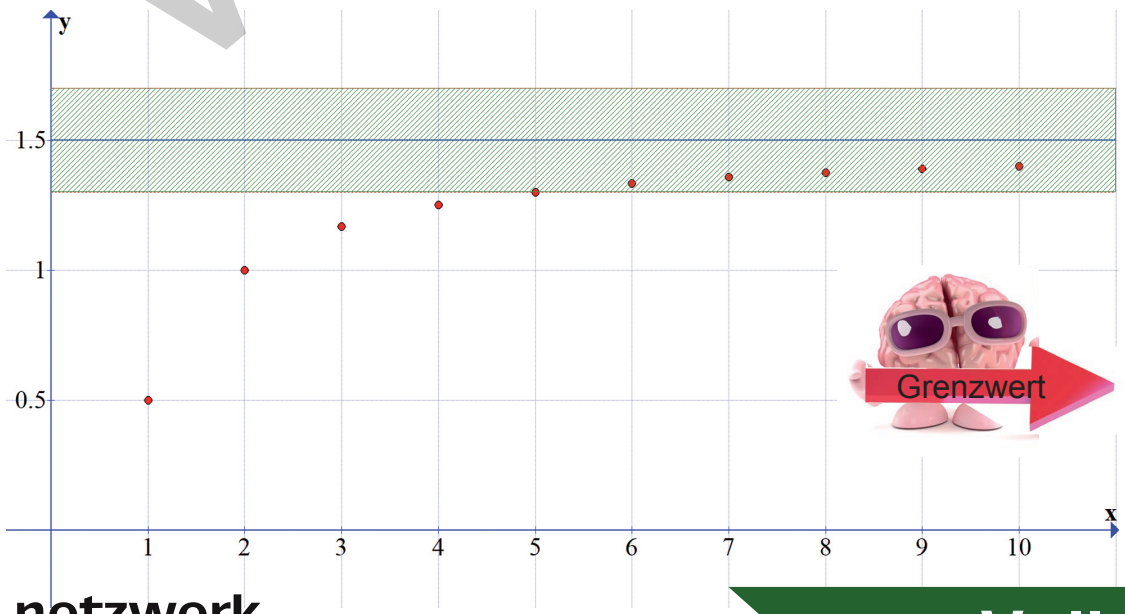
Der exakte Beweis, dass g Grenzwert einer Zahlenfolge ist, erfolgt, indem man nachweist, dass für jede positive, auch noch so kleine Zahl ε die Ungleichung

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

ab einer bestimmten Indexzahl n ($n \in N$) immer erfüllt ist.
Das Betragszeichen sagt aus, dass die Folgenglieder größer oder kleiner als der Grenzwert sein können. Dieses Verfahren wird auch als ***Epsilontik*** bezeichnet.

Beispiel:

Für die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{3n-2}{2n}$ ist die ε-Umgebung des Grenzwertes für ε = 0,2 in nachfolgendem Diagramm graphisch dargestellt.



VORSCHAU

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK
Rechnen mit ∞ – Bestell-Nr. P12 315
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

Aus der graphischen Darstellung ist zu entnehmen, dass ab dem sechsten Folgenglied **alle weiteren** – unendlich vielen – Folgenglieder innerhalb der ε-Umgebung von der Geraden $y = \frac{3}{2}$ liegen, folglich ihre Abweichung vom Grenzwert $g = \frac{3}{2}$ kleiner als $\varepsilon = 0{,}2$ ist.

Der rechnerische Nachweis, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n-2}{2n}$ gegen den Grenzwert $g = \frac{3}{2}$ konvergiert, erfolgt allgemein nach dem folgenden Prinzip:

– Das Symbol ε steht allgemein für eine beliebig kleine, positive reelle Zahl.

– Es ist nun zu zeigen, dass für die vorgegebene Folge von einem bestimmten n an die Ungleichung $\left| \frac{3n-2}{2n} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ (*) erfüllt ist.

– Durch schrittweise Umformung der Ungleichung zu

$\left| \frac{3n-2-3n}{2n} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{-1}{n} \right| < \varepsilon$ | Auflösen des Betragzeichens

$\frac{1}{n} < \varepsilon$ | Umstellung nach n

erhält man die Ungleichung

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

Mit dieser Ungleichung lässt sich zu jedem auch noch so kleinem Wert ε eine natürliche Zahl n – die Indexzahl – bestimmen, ab welcher die Forderung (*) **dann immer** erfüllt ist.
Damit ist die Konvergenz der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n-2}{2n}$ gegen den Grenzwert $g = \frac{3}{2}$ allgemein bewiesen.
Für den Spezialfall $\varepsilon = 0{,}2$ folgt: $n > \frac{1}{0{,}2} \rightarrow n > 5$
Damit liegen ab dem sechsten Folgenglied alle weiteren (unendlich vielen) Folgenglieder für $\varepsilon = 0{,}2$ in der ε-Umgebung des Grenzwertes $g = \frac{3}{2}$.

VORSCHAU

Aufgabe 5: *Ab dem wievielten Folgenglied liegen alle weiteren Folgenglieder der Folge (a_n) mit* $a_n = \frac{3n-2}{2n}$ *(siehe Beispiel oben)* in der ε-Umgebung für $\varepsilon = 0{,}01(0{,}001)$ des Grenzwertes $g = \frac{3}{2}$ *?*

Aufgabe 6: Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{2n+4}$ ist konvergent.

a) *Stelle eine Vermutung auf, welchen Grenzwert die Folge haben könnte.*

b) *Überprüfe mittels Definition des Grenzwertes (Epsilontik, siehe Seite 33) die Richtigkeit deiner Vermutung.*

netzwerk lernen
zur Vollversion

22 Lösungen

11 Geometrische Folgen

Aufgabe 2: $a_1 = 100$, $a_2 = 50$, $a_3 = 25$

$a_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{100}{2^9} = \frac{100}{512} = \frac{25}{128}$

Aufgabe 3:

a) Bildungsgesetz: $a_n = 0{,}3 \cdot 0{,}1^{n-1}$ *oder auch* $a_n = 3 \cdot 10^{-n}$

1	2	3	4	5	...
0,3	0,03	0,003	0,0003	0,00003	

b) Bildungsgesetz: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_{10} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$

1	2	3	4	5	6	...	10	...
3	6	12	24	48	96		1536	

12 Arithmetische und geometrische Folgen

Aufgabe 1:

a) 5; 10; 20; 40; ***80; 160; 320 ...*** $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

b) 10; 14; 18; 22; ***26; 30; 34 ...*** $a_n = 10 + (n - 1) \cdot 4$

c) 1/8; 1/2; 2; 8; ***32; 128; 512 ...*** $a_n = \frac{1}{8} \cdot 4^{n-1}$

d) -5; -10; -15; -20; ***-25; -30, -35 ...*** $a_n = -5 + (n - 1) \cdot (-5)$

e) 5; -10; 20; -40; ***80***; **-160**; **320** ... $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$

Aufgabe 2:

a) $d = 0{,}5$; $a_3 = 7$; $x = 100$ $a_1 = 7 - 2 \cdot 0{,}5 = 6$ Bildungsgesetz: $a_n = 6 + (n - 1) \cdot 0{,}5$

Ansatz: $6 + (n - 1) - 0{,}5 = 100$ $n - 1 = \frac{94}{0{,}5}$ $n = 189$ Es gilt: $a_{189} = 100$

b) $a_5 = 9$; $a_7 = 5$; $x = -983$ $a_5 + 2d = a_7$ $9 + 2d = 5$ $d = -2$

$a_1 + 4d = a_5 \rightarrow a_1 = 9 - 4 \cdot (-2)$ $a_1 = 17$

Das Bildungsgesetz lautet: $a_n = 17 + (n - 1) \cdot (-2)$

Ansatz: $17 + (n - 1) \cdot (-2) = -983$ $n - 1 = \frac{-1000}{-2}$ $n = 501$ Es gilt: $a_{501} = -983$

Aufgabe 3:

a) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $x = \frac{1}{16}$

Ansatz: $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{64}$ $n - 1 = 6$ $n = 7$ Es gilt: $a_7 = \frac{1}{16}$

b) $a_2 = 6$; $a_4 = 54$; $x = 486$ $\rightarrow$ $a_2 \cdot q^2 = a_4$

$q^2 = \frac{54}{6} \rightarrow q^2 = 9 \rightarrow q = 3$ $a_2 = 3 \cdot a_1 \rightarrow 6 = 3 \cdot a_1 \rightarrow a_1 = 2$

Das Bildungsgesetz lautet: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Ansatz: $2 \cdot 3^{n-1} = 486$ $3^{n-1} = 243$ $n - 1 = 5$ $n = 6$ Es gilt: $a_6 = 486$

Aufgabe 4:

Folge (a_n): $a_1 = 10$; $a_2 = 110$; $a_3 = 210$ …

Folge (b_n): $b_1 = 10$; $b_2 = 20$; $b_3 = 40$ …

Man erkennt, dass die Folgenglieder b_n für $n = 2$ und $n = 3$ kleiner sind als die Folgenglieder a_n.
Das Berechnen weiterer Folgenglieder zeigt, dass ab dem siebenten Folgenglied gilt:
$a_n < b_n$, denn $a_7 = 610$ und $b_7 = 640$.
Die Folge (b_n) holt für $n \geq 7$ die Folge (a_n) ein, denn sie wächst stärker.

VORSCHAU

UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK – Bestell-Nr. P12 315
Rechnen mit ∞
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion