Inhaltsverzeichnis

KOHL VERLAG Elementare Algebra – Bestell-Nr. P12 314

Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

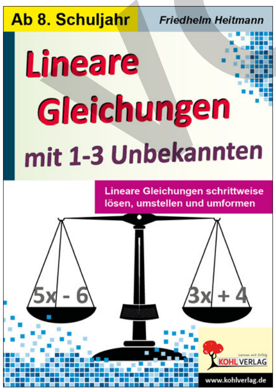
das Fach Mathematik bereitet sehr vielen Heranwachsenden große Schwierigkeiten, u.a. Verständnisprobleme. Dies betrifft auch das Rechnen mit Termen, die Variable aufweisen. In dieser Hinsicht versucht der vorliegende Band Hilfe zu leisten.

Der Band bietet eine fundamentale, detaillierte Einführung in die Thematik Terme mit Variablen – ein mathematischer Bereich, der in der Umgangssprache bisweilen als „Rechnen mit Buchstaben“ bezeichnet wird. Nicht behandelt werden im dargebotenen Band Terme mit Variablen in Gleichungen. Die Behandlung dieser umfangreichen Thematik erfolgt u.a. im ebenfalls von mir verfassten und im Kohl-Verlag erschienenen Band „Lineare Gleichungen mit 1-3 Unbekannten“[1].

Der vor Ihnen liegende bzw. in Ihren Händen befindliche Band „Elementare Algebra“[2] befasst sich in allgemeinverständlicher Sprache sowie in kleinen Schritten mit der angesprochenen Thematik. Die meisten Blätter des Bandes sind in der Regel so konzipiert und aufgebaut: Nach der Überschrift wird das jeweilige Unterthema näher erklärt. Sodann folgen gewöhnlich drei Aufgaben mit vorgerechneten Lösungen. Schließlich werden die Aufgaben genannt, die die Schüler(innen) zu bearbeiten haben. Der Band hält zwei Arbeiten/Tests bereit. Am Ende des Bandes wird ein Quiz(spiel) angeboten, das im Unterricht variabel einsetzbar ist.

Für Hinweise auf etwaige Fehler im Band sei im Voraus gedankt. Willkommen sind ebenfalls (weitere) Anregungen zur Verbesserung des Bandes. Viele Erfolge beim Einsatz der präsentierten Materialien im Unterricht wünschen Ihnen das Team des Kohl-Verlags und

Friedhelm Heitmann



[1] Friedhelm Heitmann, Lineare Gleichungen mit 1-3 Unbekannten - Lineare Gleichungen schrittweise lösen, umstellen und umformen; Kerpen (erstmals veröffentlicht 2019); Best.-Nr. 12 239

[2] Das Wort Algebra kommt ursprünglich aus der arabischen Sprache und heißt wörtlich übersetzt so viel wie „Verknüpfung getrennter Teile“.

*Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird im Folgenden die männliche Form Schüler bzw. Lehrer verwendet. Gemeint sind damit selbstverständlich auch die weiblichen Personen.

Verschiedene Rechenarten

Die 4 Grundrechenarten heißen:

- die Addition (= das Zusammenzählen, +)
  Verb: addieren
- die Subtraktion (= das Abziehen, -)
  Verb: subtrahieren
- die Multiplikation (= das Malnehmen, •)
  Verb: multiplizieren
- die Division (= das Teilen, :)
  Verb: dividieren

Das Ergebnis lautet:

- bei der Addition ➲ Summe
- bei der Subtraktion ➲ Differenz
- bei der Multiplikation ➲ Produkt
- bei der Division ➲ Quotient

In Rechenaufgaben können zugleich verschiedene Grundrechenarten vorkommen. Dabei ist der Merkspruch (= „Eselsbrücke") gültig:

Punkt vor Strich, die Klammer (aber) sagt:

„Zuerst komme ich".

Mit Punkt ist die Punktrechnung (= Multiplikation und Division), mit Strich die Strichrechnung (= Addition und Subtraktion) gemeint. Demnach sind also Punktrechnungen vor Strichrechnungen durchzuführen. Wenn es jedoch eine oder mehrere Klammern in der Aufgabe gibt, so muss zuvor ausgerechnet werden, was in (der) Klammer(n) steht.

Im Übrigen gilt es unbedingt zu beachten: Vorkommende höhere Rechenarten wie z.B. Potenzen (Beispiel: 7^2) und Wurzeln (Beispiel: $\sqrt{81}$) haben Vorrang vor den Grundrechenarten, d.h. müssen vorher erfolgen. Diese höheren Rechenarten haben aber keinen Vorrang vor Klammern.

KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg   Elementare Algebra – Bestell-Nr. P12 314

Zwei Rechengesetze

Bei der Addition und Multiplikation lässt sich das Kommutativgesetz (= Vertauschungsgesetz) anwenden. *commutatio* (lat.) = Veränderung, Tausch

Beispiel für die Addition:

5 + 8 = 8 + 5 = 13

oder mit Buchstaben ausgedrückt

a + b = b + a

Beispiel für die Multiplikation:

5 • 8 = 8 • 5 = 40

oder mit Buchstaben ausgedrückt

a • b = b • a

Ebenfalls ist bei der Addition und Multiplikation das Assoziativgesetz (= Verbindungsgesetz) anwendbar. *socius* (lat.) = gemeinsam, verbunden

Beispiel für die Addition:

16 = 13 + 3 = (5 + 8) + 3 = 5 + (8 + 3) = 5 + 11 = 16

oder mit Buchstaben ausgedrückt

(a + b) + c = a + (b + c)

Beispiel für die Multiplikation:

120 = 40 • 3 = (5 • 8) • 3 = 5 • (8 • 3) = 5 • 24 = 120

oder mit Buchstaben ausgedrückt

(a • b) • c = a • (b • c)

Aufgabe 1: *Du hast den Text auf der vorherigen Seite und auf dieser Seite gelesen. Kreuze an: Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch?*

		Richtig	Falsch
1.	Der Fachbegriff für die Plusrechnung ist Addition.		
2.	Die Subtraktion ist das Gegenteil zur Division.		
3.	Das Resultat bei der Multiplikation nennt man Quotient, das der Division Produkt.		
4.	Die Punktrechnung umfasst die Multiplikation und Division.		
5.	Die Multiplikation sowie Division haben Vorrang vor der Addition und Subtraktion.		
6.	Zuerst muss berechnet werden, was außerhalb einer oder mehrerer Klammern steht.		
7.	Höhere Rechenarten müssen vor den Grundrechenarten durchgeführt werden.		
8.	Man kann das Kommutativgesetz auch Verbindungsgesetz nennen, das Assoziativgesetz als Vertauschungsgesetz bezeichnen.		
9.	Das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz gelten nur für zwei Grundrechenarten.		
10.	Das Vertauschungsgesetz lässt sich u.a. so ausdrücken: a + b = a · b		
11.	Das Kommutativgesetz besagt, dass bei der Veränderung der Reihenfolge der zu multiplizierenden Zahlen das Endergebnis gleich bleibt.		
12.	Es gilt stets: (a • b) • c = a + (b • c)		

Aufgabe 2: *Verbessere jetzt die falschen Aussagen.*

Punkt- und Strichrechnung mit Termen

Bedenke:

Die Punktrechnung (= Multiplikation und Division) hat Vorrang vor der Strichrechnung
(= Addition und Subtraktion), muss also zuerst durchgeführt werden.

Beachte auch:

Nur Gleichartiges (= gleichartige Variable, einzelne Zahlen) dürfen zusammengefasst werden.

Drei Beispiele: a + 2 • b - b = a + 2b - b = a + b

21cd + 6 • 3 - 7c • 2d = 21cd + 18 - 14cd = 7cd + 18

-9 + 7 • 3a + 56b : 8b + 10 = -9 +21a + 7 + 10 = 21a + 8

Aufgabe 1:

a) 4 • a + 3 • b ______________________

b) 5 + 2 • 5b - 4 • 3a ______________________

c) 12b : 3 + 5b - 5 • 4a ______________________

d) 15c : 15 - 14 + 15 ______________________

e) 42c : 6c + d • 7 + 5 ______________________

f) 4cd + 2 • 3cd + 8 - 9cd ______________________

g) 16ab - 2 • bc + 16a : 4 - 2 • 3 ______________________

h) 18x - 2 • 3y - 6xy + 3x • 2y ______________________

i) 24xy - 3y • 6x + 5 • 2x - 8 • y ______________________

j) 16x + 17 • y + 18 - 19 + 28x : 7 ______________________

k) -19 + 12x • y + 36xy : 9x - 3 ______________________

l) -4y • 9x + 25xy : 5 - 5x + 9 • 2y ______________________

m) 32xy - 29y • x + 27xy : 3y - 3 • 4x ______________________

n) 36xyz : 6xy - 11 • 2x + 11 - 6x + 13 ______________________

o) 45xyz : 9yz - 8 • 3z + 9 • 3x - 8x : 4 ______________________

Elementare Algebra – Bestell-Nr. P12 314
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Welcher Term entspricht welcher Vereinfachung?

Aufgabe 1: *Notiere, welches unten auf der Seite genannte Ergebnis zu welcher der nachfolgenden 20 Aufgaben gehört.*

a) $a + a + a =$ __________

b) $a + b + a + b =$ __________

c) $2b - b =$ __________

d) $5b - 2b =$ __________

e) $a - b + a - b =$ __________

f) $a + b - a - b =$ __________

g) $a + 2b - b =$ __________

h) $a - 2a =$ __________

i) $a \cdot b =$ __________

j) $2a \cdot 2 =$ __________

k) $2a \cdot 2b =$ __________

l) $2a \cdot 3{,}5b =$ __________

m) $6a : 3 =$ __________

n) $6a : 3a =$ __________

o) $5b : 2 =$ __________

p) $b : b =$ __________

q) $8ab : 4 =$ __________

r) $8ab : 2a =$ __________

s) $8ab : 2ba =$ __________

t) $4a : 2b =$ __________

Die Ergebnisse (ungeordnet):

$2a - 2b$ 0 $4ab$ $3b$ $2{,}5b$

$4b$ $a + b$ ab $7ab$ $4a$

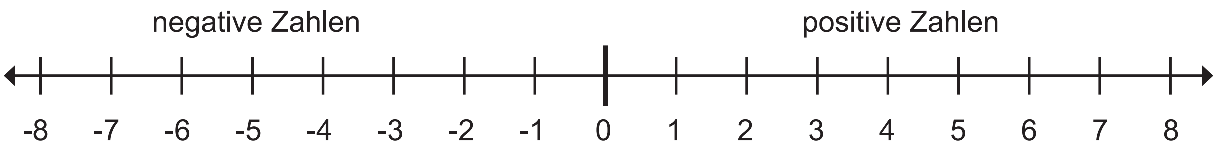
$2a + 2b$ $2ab$ $3a$ $2\frac{a}{b}$ $2a$

1 $-a$ 4 b 2

KOHL VERLAG Elementare Algebra – Bestell-Nr. P12 314

Rechnen mit negativen Zahlen

Das Rechnen mit negativen Zahlen (= Minuszahlen) lässt sich einführend am besten verdeutlichen und verstehen am Zahlenstrahl, der auf der linken Seite die negativen Zahlen und auf der rechten Seite die positiven Zahlen aufweist:



Bei der Addition (+) geht man von der jeweiligen Ausgangszahl nach rechts, bei der Subtraktion (-) nach links.

Negative Zahlen lassen sich gut veranschaulichen als finanzielle Schulden.

Beim Rechnen mit negativen Zahlen gilt es unbedingt die Vorzeichenregeln zu beachten:

1. + (+ ...) = + ...
- (- ...) = + ...
+ (- ...) = - ...
- (+ ...) = - ...

Wenn zwei gleiche Vorzeichen direkt nebeneinander stehen, werden sie zu plus (+).
Stehen dagegen zwei ungleiche Vorzeichen direkt nebeneinander, werden sie zu minus (-).

2. Multiplikation

(+ ...) • (+ ...) = + ...
(- ...) • (- ...) = + ...
(+ ...) • (- ...) = - ...
(- ...) • (+ ...) = - ...

Bei der Multiplikation von zwei Faktoren mit gleichen Vorzeichen ist das Ergebnis positiv (+).
Multipliziert man zwei Zahlen, die ungleiche Vorzeichen haben, ist das Ergebnis negativ (-).

3. Division

(+ ...) : (+ ...) = + ...
(- ...) : (- ...) = + ...
(+ ...) : (- ...) = - ...
(- ...) : (+ ...) = - ...

Bei der Division von zwei Operanden mit gleichen Vorzeichen ist das Ergebnis positiv (+).

Dividiert man zwei Zahlen, die ungleiche Vorzeichen haben, ist das Ergebnis negativ (-).

<u>Hinweis</u>:

Als Faktoren bezeichnet man das, was miteinander malgenommen wird.

factor (lat.) = Macher; jemand, der etwas tut.
operatio (lat.) = Arbeit, Wirken

Elementare Algebra – Bestell-Nr. P12 314
KOHL VERLAG

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis

Potenzen mit gleicher Basis (= Grundzahl) lassen sich miteinander multiplizieren. Dabei wird die gemeinsame Basis beibehalten (einmal). Die Exponenten (= Hochzahlen) werden addiert.

Drei Beispiele für Potenzen mit Variablen:

$a^2 \cdot a = a^3$

$a^3 \cdot a^2 = a^5$

$(ab)^3 \cdot (ab)^4 = (ab)^7$

Hinweis:

$a = a^1$

Potenzen mit gleicher Basis (= Grundzahl) lassen sich durcheinander dividieren. Dabei wird die gemeinsame Basis beibehalten (einmal). Die Differenz der beiden Exponenten (= Hochzahlen) wird gebildet.

Vier Beispiele für Potenzen mit Variablen:

$a^3 : a^2 = a^1 = a$

$a^6 : a^4 = a^2$

$(ab)^5 : (ab)^3 = (ab)^2$

$a^4 : a^4 = a^0 = 1$

Hinweis:

$a^0 = 1$

<u>Aufgabe 1</u>: *Löse die anschließenden Aufgaben.*

a) $a^3 \cdot a =$ ______________________

b) $a^4 \cdot a^3 =$ ______________________

c) $a^2 \cdot a^6 =$ ______________________

d) $(ab)^2 \cdot (ab)^3 =$ ______________________

e) $a^4 : a^3 =$ ______________________

f) $b^5 : b =$ ______________________

g) $b^6 : b^3 =$ ______________________

h) $(ab)^2 \cdot (ba)^2 =$ ______________________

i) $(ab)^9 : (ba)^4 =$ ______________________

j) $(ab)^6 : (ab)^6 =$ ______________________

Die 1. binomische Formel

In der Mathematik bezeichnet man einen zweigliedrigen Term als Binom.
bi (lat.) = doppelt, zwei(fach);
nomos (griech.) = Glied ...

Ein Binom setzt sich also aus 2 Teilen zusammen. Binome sind z. B.:

$$a + b,\ 2b + 3,\ y - 4$$

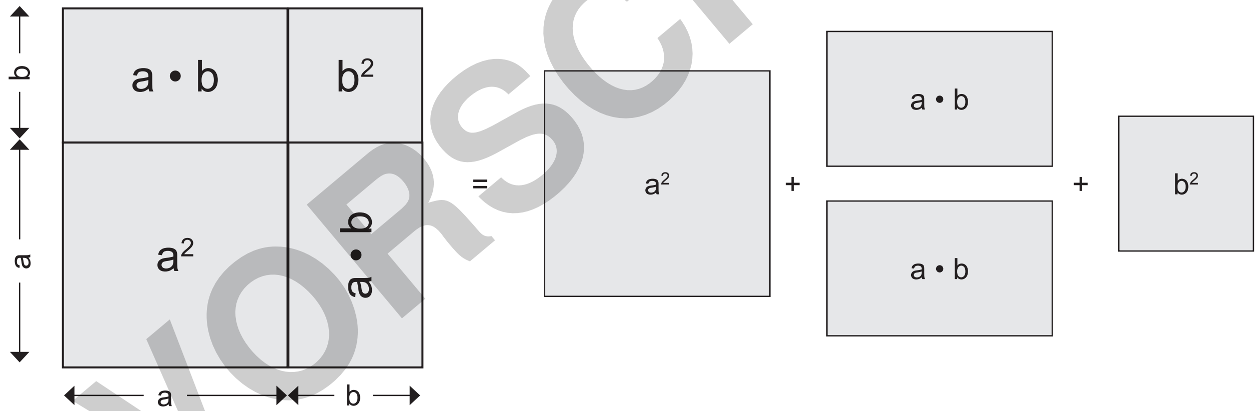
Multipliziert man einen zweigliedrigen Term mit demselben zweigliedrigen Term, kann man jedes Glied des ersten Terms mit jedem Glied des zweiten Terms malnehmen und dann Gleichartiges zusammenfassen:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Diese Rechnung lässt sich durch die sofortige Anwendung der sogenannten 1. binomischen Formel verkürzen:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Die Richtigkeit dieser Formel lässt sich veranschaulichen:



Auch durch das Rechnen mit Zahlen lässt sich die 1. binomische Formel nachvollziehen:

a = 3cm b = 2cm

$(3cm + 2cm)^2 = (3cm \cdot 3cm) + 2 \cdot (3cm \cdot 2cm) + (2cm \cdot 2cm) = 9cm^2 + 2 \cdot 6cm^2 + 4cm^2 =$
$9cm^2 + 12cm^2 + 4cm^2 = 25cm^2$ oder direkt $(3cm + 2cm)^2 = 5cm \cdot 5cm = 25cm^2$

Drei Beispiele für die Anwendung der 1. binomischen Formel:
$(2a + 4)^2 = 4a^2 + 16a + 16$
$(5b + 3)^2 = 25b^2 + 30b + 9$
$(6x + y)^2 = 36x^2 + 12xy + y^2$

Die 1. binomische Formel

Aufgabe 1: *Wende bei den folgenden Aufgaben die 1. binomische Formel an.*

a) $(a + 6)^2 =$ ____________________

b) $(8 + b)^2 =$ ____________________

c) $(1 + 2b)^2 =$ ____________________

d) $(4a + b)^2 =$ ____________________

e) $(7a + 3b)^2 =$ ____________________

f) $(8a + 5b)^2 =$ ____________________

g) $(\frac{1}{2}a + b)^2 =$ ____________________

h) $(2a + \frac{1}{2})^2 =$ ____________________

i) $(\frac{1}{2} + 4b)^2 =$ ____________________

j) $(0{,}5a + 0{,}5b)^2 =$ ____________________

k) $(0{,}25x + y)^2 =$ ____________________

l) $(0{,}25x + 0{,}5y)^2 =$ ____________________

m) $(9x + 7y) \cdot (9x + 7y) =$ ____________________

n) $(2{,}5x + 3) \cdot (2{,}5x + 3) =$ ____________________

o) $(8 + 3{,}5y) \cdot (8 + 3{,}5y) =$ ____________________

Elementare Algebra – Bestell-Nr. P12 314
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Terme mit Variablen – ein Quiz(spiel)

Spielerzahl: möglichst 2 - 4 Spieler bzw. Mannschaften

Spielmaterialien:

- 2 Spielpläne (siehe Vorlagen Seite 49 und 50);
- 1 sechsflächiger Zahlenwürfel mit den Augenzahlen 1-6, evtl. ein Würfelbecher;
- je Spieler/Mannschaft 1 kleiner Spielstein, der sich von den Spielsteinen der Gegenspieler farblich unterscheidet;
- evtl. z.B. 1 Schreibstift und Papier (zum Notieren der von den einzelnen Spielern/Mannschaften erzielten Punkte);
- evtl. je Spieler/Mannschaft 1 Schreibstift, um die 36 auf einem Spielplan genannten Aufgaben schriftlich zu beantworten.

Spielvorbereitung: Ein Spielplan wird mitten auf einen Tisch gelegt. Die Spieler/Mannschaften setzen sich um diesen Tisch herum. Jeder Spieler/jede Mannschaft stellt den eigenen Spielstein auf dem Spielplan vor dem Feld Nr. 1 auf.

Spielregeln: Im Verlauf des Spiels sind die Spieler/Mannschaften abwechselnd an der Reihe. Wer dran ist, würfelt jeweils einmal. Das Würfelergebnis bestimmt, auf welches Feld der Spieler/die Mannschaft seinen Spielstein auf den von 1-36 durchnummerierten Feldern des Spielplans vorziehen darf, sofern die auf dem betreffenden Feld genannte Aufgabe richtig beantwortet wird. Falls die Aufgabe nicht korrekt beantwortet wird, muss der Spielstein an der vorherigen Stelle stehenbleiben. Die Kontrolle, ob die gestellten Aufgaben richtig beantwortet werden, erfolgt durch alle Spieler/Mannschaften gemeinsam.

Spielsieg: Gewinner des Spiels ist, wer mit seinem Spielstein auf dem Spielplan zuerst das Feld Nr. 36 erreicht oder gemäß Würfelergebnis darüber hinweg gelangt.

Variationen:

- Das Quiz wird ohne den Einsatz eines Würfels durchgeführt. Wer an der Reihe ist, darf sich zur Beantwortung eine Aufgabe aussuchen, die im bisherigen Verlauf des Spiels noch nicht (richtig) beantwortet worden ist.
  Alternative: Die Aufgaben gilt es, in der vorgegebenen Reihenfolge zu lösen (Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3 …). Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Spielsieger ist, wer schließlich die meisten Punkte errungen hat.
- Jeder Spieler/jede Mannschaft erhält den vorliegenden Spielplan als Arbeitsblatt. Innerhalb einer vorgegebenen Zeit muss jeder Spieler/jede Mannschaft die 36 Aufgaben schriftlich beantworten. Wer löst die meisten Aufgaben?
- …

$3a + 4a =$ 1	$8a - 12ab - ab =$ 2	$5a \cdot 7 =$ 3	$28b : 7b =$ 4	$(-36a) : 9a =$ 5	$a + (-a) =$ 6
-6 ____ $= 42a$ 7	$7(2b + 4) =$ 8	$(x + 3)(x - 4) =$ 9	$32b$ ____ $= -8$ 10	$-(5 + x) =$ 11	$(10x - 3)\,7 =$ 12
$a \cdot a \cdot a =$ 13	$4a^2 + 6a^2 - a^2 =$ 14	$(ab)^5 : (ab)^2$ 15	$(a + 4)^2 =$ 16	$(10a - 2b)^2 =$ 17	$(5a + 3b)(5a - 3b) =$ 18
$a^5 \cdot b^5 =$ 19	$27a^3 \cdot 125b^3 =$ 20	$6^b : 3^b =$ 21	$(5b^4)^3 =$ 22	$(a^7)^5 =$ 23	$(b^5 : b^2)^3 =$ 24
$3a^{-4} =$ 25	$a^{-2} \cdot b^3 =$ 26	$\left(\frac{2x}{y}\right)^3 =$ 27	$856.000 =$ 28	$2.970.000 =$ 29	$10.000 \cdot 10.000 =$ 30
$10^{-5} =$ 31	$0{,}00033 =$ 32	$10^{-4} \cdot 10^5 =$ 33	$\sqrt{49a^2} =$ 34	$\sqrt[3]{27b^3} =$ 35	$(3a - x)(3a + x) =$ 36