Inhaltsverzeichnis

8 Potenzen und Logarithmen

9 Grundlagen von Funktionen und die Exponentialfunktion

10 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

11 Lösungen

Vorwort

> *„Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da–Sein, sondern das Hinkommen, das den größten Genuss gewährt.“*
>
> *(Carl Friedrich Gauß)*
>
> Quelle: Die Wurzel, Heft 11/99, S. 247

Liebe Kolleginnen und Kollegen[1],

Sie kennen das: Oft sind grundlegende mathematische Kenntnisse nicht so verfügbar, wie Sie sich das als Lehrer vorstellen und wie es sich auch Ihre Schüler gerne wünschen. Liegt die Erstbegegnung mit einem bestimmten Thema oder auch dessen Wiederholung schon etwas länger zurück, fällt vielen Lernenden die Erinnerung daran besonders schwer. Bereits nach etwa vier Wochen ist das meiste der gerade behandelten Inhalte vergessen.
Als Lehrkraft hat man das Gefühl, in den vergangenen Monaten und Jahren nicht genügend Basiswissen vermittelt zu haben, weil vielen Schülern die Bruchrechnung, das Umgehen mit binomischen Formeln oder das Lösen von Gleichungen – die Liste lässt sich beliebig fortsetzen – ein Buch mit sieben Siegeln ist.
Die Erfahrung zeigt es immer wieder: Mathematiklernen ist mit dem Bau eines Hauses vergleichbar. Nur auf solidem Fundament kann schrittweise Stockwerk um Stockwerk errichtet werden.
Sollten Sie also feststellen, dass Ihre Schüler Defizite in der Bruchrechnung, in den Grundlagen der Stochastik oder auf einem anderen Gebiet der Mittelstufe aufweisen, dann finden Sie hier die passenden Wiederholungseinheiten.
Den Aufgaben in den einzelnen Kapiteln sind jeweils zwei Niveaustufen zugeordnet. Einfache Aufgaben sind mit einem Stern, anspruchsvollere Aufgaben sind durch zwei Sterne gekennzeichnet.

An diesem Buch haben viele mitgearbeitet, denen ich danken möchte. In erster Linie natürlich meinen Schülern, deren Fragen und auch Irrtümer mir zeigten, wo und warum Verständnisprobleme entstehen. So versteht sich dieses Buch auch als Wegweiser durch die Welt der Fehler im Mathematikunterricht. Fehler sollten wir im Unterricht als methodisches Mittel einbeziehen. Wir sollten sie als das benutzen, was sie im Grunde sind: Orientierungshilfen! Lernen kann man nur dann, wenn man auch Fehler machen darf. Und im Übrigen: Nur wer etwas tut, kann Fehler machen.

Weitere hilfreiche Hinweise kamen von der verantwortlichen Redakteurin, Frau Barbara Haas, und von Herr Dieter Müller.
Ich wünsche Ihnen, liebe Kolleginnen und Kollegen, viel Freude mit diesem Material und vor allem Erfolg in Ihrem pädagogischen Alltag,

Ihr
Walter Czech

[1] Aufgrund der besseren Lesbarkeit ist in diesem Buch mit Lehrer imme[illegible] Schüler und Schülerin etc.

Fachlicher Inhalt

Die Analytische Geometrie, ein neues Gebiet der Geometrie in der Oberstufe, beschäftigt sich vornehmlich mit der rechnerischen Beschreibung des dreidimensionalen Anschauungsraumes. Das bedeutet für die Schüler, dass sie über ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen verfügen sollten. Dieses Grundwissen sollte geläufig sein:

1. Durch einen Punkt P einer Ebene E gibt es genau eine Lotgerade und diese steht senkrecht auf jeder Geraden, die in dieser Ebene E liegt.
2. Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E ist die Länge der kürzesten Strecke von P nach E, wobei der Abstand als Länge der Strecke zwischen P und dem Schnittpunkt S der Lotgeraden zu E durch P aufzufassen ist.

Didaktisch-methodische Hinweise

Am konkreten Modell lernen Ihre Schüler oft wirkungsvoller als durch Belehren und noch so aufwendig erstellte Zeichnungen. Die Erfahrung zeigt: Diese Zeichnungen können die Lernenden erst dann richtig deuten, wenn sie sich die Verhältnisse am Modell anschaulich klargemacht haben. Sie müssen sich vorstellen können, „welche Strecke auf welcher Ebene senkrecht steht“, „wo rechtwinklige Dreiecke auftreten“ oder „wie Figuren zueinander liegen“. Und beim Problemlösen muss ihnen klar sein, „wie etwas sein könnte“, damit sich ein Lösungsweg „auftut“.

<u>Schwierigkeiten:</u>

Die Erfahrung zeigt, dass das räumliche Vorstellungsvermögen vieler Schüler zu Beginn der Oberstufe noch Schwächen hat.

<u>Hilfestellungen:</u>

Schätzen Sie die Aktivitäten des Schneidens, Faltens und Bauens nicht zu gering ein. Das Lösen raumgeometrischer Probleme wird erleichtert, wenn man sich die Verhältnisse in einer Schrägbildzeichnung verdeutlicht. Das Skizzieren solcher Schrägbilder muss geübt werden.

<u>Gute Modelle:</u>

Als Modelle eignen sich

- 2 cm-Holzwürfel in größerer Anzahl,
- Würfel mit verschiedenen Kantenlängen, die die Schüler selbst aus Karton herstellen,
- Tetraeder, die die Schüler aus Karton selbst herstellen bzw. mithilfe geeigneter Materialien (siehe Literatur) selbst basteln,
- Pyramiden, die die Schüler aus Karton anfertigen bzw. mithilfe geeigneter Materialien (siehe Literatur) selbst basteln.

Das Anlegen einer Lernkartei kann als Nachschlagewerk für die Oberstufe und bei der Vorbereitung auf die Prüfung dienen.

Literatur

Czech, W.: Am Modell zum Schrägbild. In Schulmagazin, 2014, S. 21–28
Czech, W.: Pyramidenmodelle für die Schultasche. In: RAAbits Mathematik, Dezember 2013
Harnischfeger, J. (Hg.)/Juen, H. (Hg.): Figuren/Flächen im Alltag; Körper erkennen, bauen. 3. Auflage 2016. Auer Verlag (Bestell-Nr. 09108)
Harnischfeger, J. (Hg.)/Juen, H. (Hg.): Flächenberechnung; Körperberechnung. 3. Auflage 2016. Auer Verlag (Bestell-Nr. 09113)
Höfer I., Keppeler B., Plechinger B.: Individuell fördern Mathe 5. Geometrie. 1. Auflage 2010. Auer Verlag (Bestell-Nr. 06263)
Hoppe, P./Kümml, A.: Mathe an Stationen Spezial. Figuren und Körper 5–7. 2. Auflage 2016. Auer Verlag (Bestell-Nr. 06951)
...zek, B.: Mathe an Stationen. Figuren und Körper 8–10. 2. Auflage ...

Würfel und Würfelnetze

Stellen Sie sich einen Holzwürfel mit 3 cm Kantenlänge vor, der auf dem Tisch liegt. Der Würfel wird mit roter Farbe angestrichen. Dabei wird er weder gehoben noch gekippt.

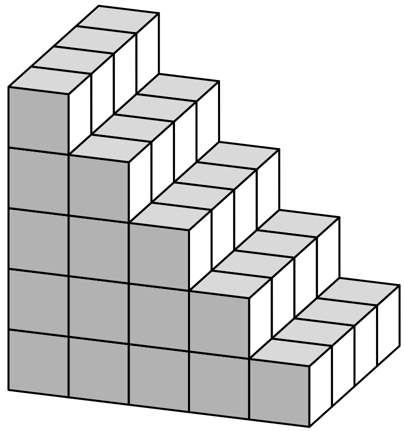
Nach dem Trocknen wird er in Einheitswürfel mit 1 cm Kantenlänge zersägt. Bestimmen Sie die Anzahl

a) der Einheitswürfel, die entstehen.

b) der Würfel, die
   (1) genau eine rote Seitenfläche haben.
   (2) genau drei rote Seitenflächen haben.

Würfel und Würfelnetze

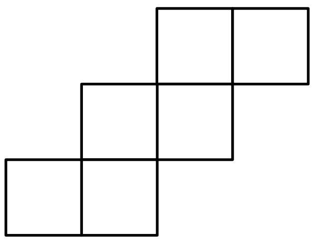
2. Geben Sie die Anzahl der Würfel an, die zum kleinstmöglichen Quader noch fehlen.



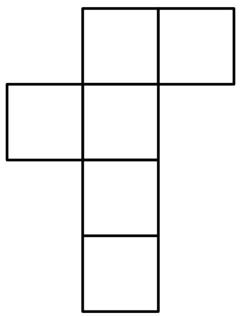
Würfel und Würfelnetze

Falten Sie in <u>Gedanken</u> das Netz zum Würfel. Kennzeichnen Sie mit gleichen Farben oder mit gleichen Buchstaben gegenüberliegende Begrenzungsflächen.

a)

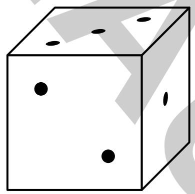


b)

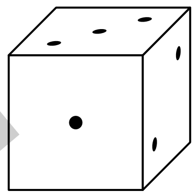


Würfel und Würfelnetze

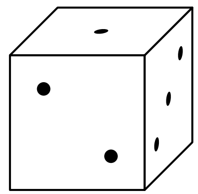
4. Geben Sie die Nummer der Würfel (1 bis 4) an, die durch mehrmaliges Drehen des Ausgangswürfels entstehen können.



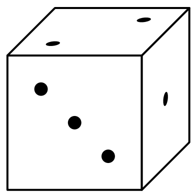
Würfel 1



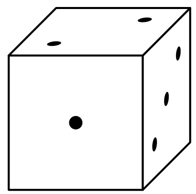
Würfel 2



Ausgangswürfel



Würfel 3



Würfel 4

Geometrie in der Ebene und im Raum

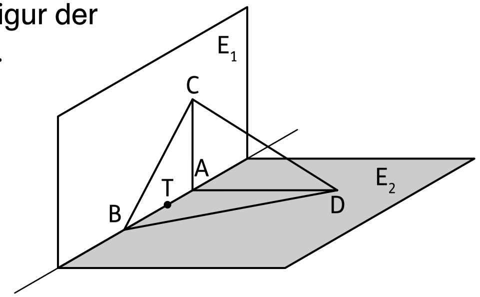
5. Kopfgeometrie
   a) Geben Sie die Anzahl der Flächendiagonalen für einen Quader an.
   b) Geben Sie die Anzahl der Körperdiagonalen eines Quaders an.
   c) Nennen Sie Vierecke mit zwei Symmetrieachsen.
   d) Die Körperdiagonalen eines Würfels sind alle gleich lang. Ermitteln Sie für einen Würfel der Kantenlänge a die Länge jeder dieser Körperdiagonalen.
   e) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Ein Viereck mit gleich langen Diagonalen ist ein Rechteck.
   f) Eine Ebene E wird von zwei verschiedenen Lotgeraden l_1 und l_2 geschnitten. Beschreiben Sie ihre Lage im Raum zueinander.
   g) Bestimmen Sie die geometrische Figur, die entsteht, wenn man alle Punkte zeichnet, die den gleichen Abstand d von einer gegebenen Geraden g haben.

Geometrie in der Ebene und im Raum

6. In der Abbildung gilt: Ebene E_1 steht senkrecht auf der Ebene E_2. Gerade s ist Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2. AC und AD stehen senkrecht auf s.

a) Geben Sie die geometrischen Eigenschaften der Seitenflächen des Tetraeders ABCD an.

b) Durch den Punkt $T \in [AB]$ wird eine Ebene E_3 gelegt, die das Tetraeder schneidet und die auf AB senkrecht steht. Beschreiben Sie die Schnittfigur der Ebene E_3 mit dem Tetraeder.

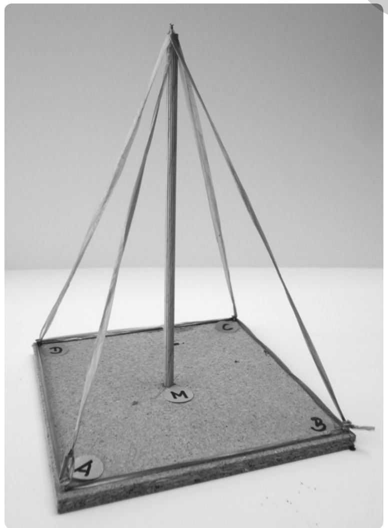


Geometrie in der Ebene und im Raum

7. Das Modell zeigt die Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrates ABCD.

a) Beschreiben Sie die Form der Seitenflächen.

b) Die Pyramide wird von einer Ebene E geschnitten, die durch die Kante [CD] geht und die [SA] in P und [SB] in T schneidet. Beschreiben Sie die geometrische Schnittfigur CDPT.

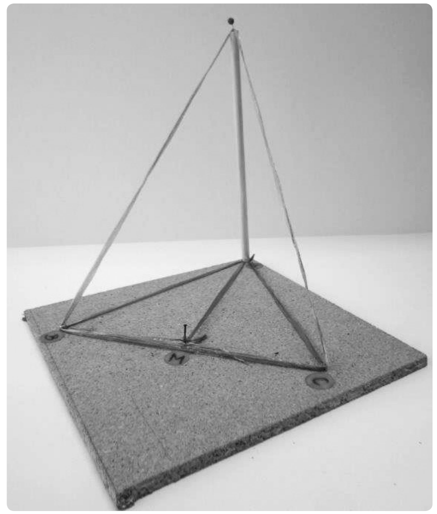


Geometrie in der Ebene und im Raum

8. Das Modell zeigt die Pyramide ABCS, deren Grundfläche ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Dreieckshöhe $\overline{AM} = 4\sqrt{3}$ ist. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Punkt A der Grundfläche ABC mit $\overline{AS} = 10$. Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke [BC].

a) Beschreiben Sie die Form der Seitenflächen der Pyramide.

b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass gilt: $\overline{BC} = 8$.



Bruchrechnung

Fachlicher Inhalt

Zum Bruchrechnen gehören vor allem die Themen, wie man Brüche kürzt und erweitert, wie man sie der Größe nach ordnet, wie man Bruchteile berechnet und wie man Brüche in Dezimalbrüche umwandelt. Auch das grundlegende Rechnen mit Brüchen gehört dazu, also wie man Brüche miteinander addiert und multipliziert, voneinander subtrahiert und dividiert.

Didaktisch-methodische Hinweise

- Ein Bruch wird erweitert (gekürzt), indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert (durch dieselbe Zahl geteilt) werden.
- Beim Kürzen von Brüchen sind die Teilbarkeitsregeln nützlich.
- Gemischte Zahlen werden in unechte Brüche umgewandelt.
- Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet.
- Punktrechnung vor Strichrechnung
- $a : b = \frac{a}{b}$; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

  Speziell: $\frac{0}{b} = 0$ für $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- **Merke:**

  $\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\quad \frac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad \frac{1}{8} = 0{,}125$ $\quad \frac{1}{10} = 0{,}1$ $\quad \frac{1}{100} = 0{,}01$ $\quad \frac{1}{5} = 0{,}2$

Sonstige Hinweise

Beispielsweise das Anlegen einer Lernkartei – eventuell mithilfe der vorliegenden Aufgabenkärtchen.
Abwechslungsreich und mit dem nötigen Lerneffekt lässt sich das Rechnen mit Brüchen in **Übungsspielen** einüben.
Fertige Spielvorschläge finden sich z. B. in [1].

Literatur

[1] Czech, W.: 66 Spielideen Mathematik. Auer Verlag (Bestell-Nr. 07755)

7 Quadratische Gleichungen

Fachlicher Inhalt

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung zweiten Grades, d. h. die Variable x kommt in keiner höheren als der zweiten Potenz vor.

Vier Fälle werden für $a \neq 0$ unterschieden:

$$ax^2 = 0$$
$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 + bx = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Wichtiger Spezialfall:

Für $c = 0$ lautet die Gleichung: $ax^2 + bx = 0$

Hier lässt sich der Faktor x ausklammern: $x \cdot (ax + b) = 0$

Nach der Regel *„Ein Produkt wird Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist“* erhält man diese Lösungen:

$$x = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = -\frac{b}{a}$$

Didaktisch-methodische Hinweise

Die meisten Polynome, die man in der Oberstufe betrachtet, sind Polynome zweiten Grades, deren Funktionsterme also quadratische Gleichungen sind.
Die folgende Lösungsformel sollten Ihre Schüler **auswendig** kennen:
Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat unter der Voraussetzung, dass $b^2 - 4ac \geq 0$ gilt, diese reellen Lösungen:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Schwierigkeiten:

Nicht immer erkennen Schüler, dass eine Gleichung zweiten Grades vorliegt.
Beispiel:
Ersetzen wir $z = e^x$ in $3e^{2x} - 4 + e^x = 0$, dann erhalten wir mit $3z^2 + z - 4 = 0$ offensichtlich eine quadratische Gleichung.

Hinweis:

Mit **Übungsspielen** kann das Lösen quadratischer Gleichungen eingeübt werden.
Vorlagen für Übungsspiele in [1].

Literatur

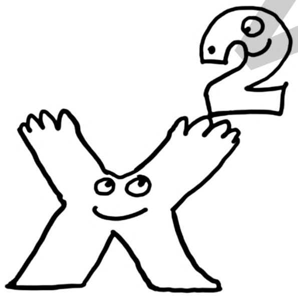
[1] Czech, W.: 66 Spielideen Mathematik. Auer Verlag (Bestell-Nr. 07755)

Grundlagen Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $x^2 = 2x$

b) $9x^2 + 3 = 7$



Grundlagen Quadratische Gleichungen

2. Geben Sie eine quadratische Gleichung mit den Lösungen 1 und –2 an.

Grundlagen Quadratische Gleichungen

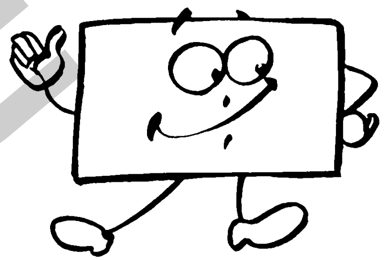
3. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $(x - 1)^2 = -4x$

b) $-x^2 + 66x - 1\,089 = 0$

Grundlagen Quadratische Gleichungen

4. Untersuchen Sie rechnerisch, ob ein Rechteck den Umfang 16 cm und den Flächeninhalt 16 cm² haben kann.



Czech: 15-Minuten-Grundlagentraining Mathematik Klasse 11
r Verlag

Quadratische Gleichungen in der Oberstufe

Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und

$f(x) = x^4$

und

$g(x) = -x^2 + 6$

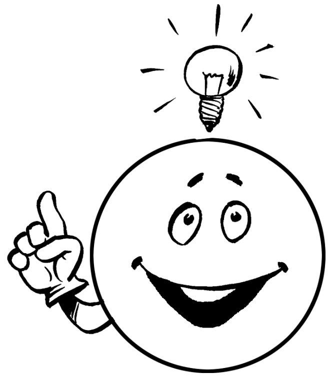
Quadratische Gleichungen in der Oberstufe

6. Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Gleichungen:

$y = -x^2 + 4$

und

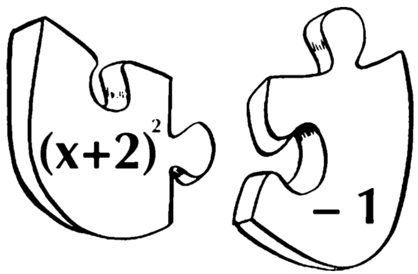
$y = \frac{7}{3}x^2 - \frac{25}{3}x + 4$



Quadratische Gleichungen in der Oberstufe

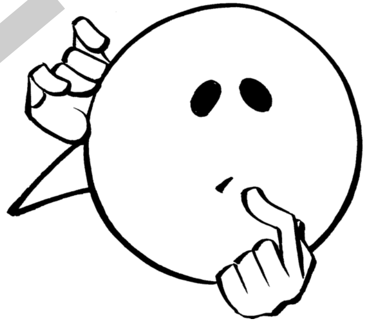
Der Graph einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ geht durch die Punkte A(0|–5), B(3|10) und C(–3|–14).

Entscheiden Sie durch Rechnung, ob der Punkt P(90|3055) auf dieser Parabel liegt.



Quadratische Gleichungen in der Oberstufe

8. Bestimmen Sie die Anzahl der Einheiten, um welche die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2 - 6x$ nach oben verschoben werden muss, damit sie die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 4$ berührt.



Potenzen

Fachlicher Inhalt

Für eine Multiplikation mit lauter gleichen Faktoren, wie z. B. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ verwendet man die Abkürzung 3^5. Analog zur Multiplikation (als Abkürzung für Summen mit gleichen Summanden, wie z. B. $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5$) ist dies eine neue Rechenart, das **Potenzieren**.

Für Potenzen mit reellen Hochzahlen gilt innerhalb der Definitionsbereiche:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y = (a^y)^x \qquad a^{\frac{x}{y}} = (a^x)^{\frac{1}{y}} = (a^{\frac{1}{y}})^x$$

Speziell gilt:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Didaktisch-methodische Hinweise

Häufige Fehlerquelle beim Umgang mit Potenzen:

Diese Gleichungen müssen unterschieden werden:

- $a^n \cdot a^{n-1} = a^{n+n-1} = a^{2n-1} \qquad (a^n)^{n-1} = a^{n(n-1)} = a^{n2-n} \qquad a^n \cdot (a^n - 1) = a^{2n} - a^n$
- Bei Summen darf der Exponent nicht gliedweise auf die Summanden übertragen werden:

  $(a^2 + b^{-2})^{-2} \neq a^{-4} + b^4$ **sondern** $(a^2 + b^{-2})^{-2} = \dfrac{1}{(a^2 + b^{-2})^2} = \dfrac{1}{a^4 + 2a^2b^{-2} + b^{-4}}$
- So ist auch: $a^{-1} + b^{-1} \neq (a + b)^{-1} \qquad a^{-1} + b^{-1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{b + a}{ab}$

Häufige Fehlerquelle beim Rechnen mit Wurzeln:

falsch: $\sqrt{169 - 144} = 13 - 12 = 1$ **richtig:** $\sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$

Hinweis:

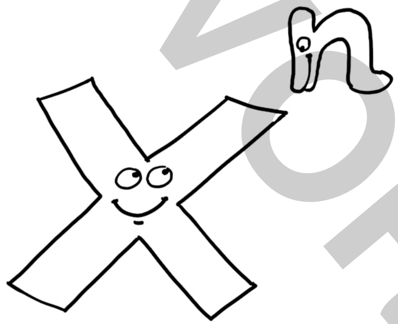
Das Anlegen von **Lern- und Übungskarten** sichert Rechenroutine.

Rechnen mit Potenzen

1. Vereinfachen Sie.

a) $5^{1,5} : 5^{0,5}$

b) $3^{0,5} : \sqrt{12}$



Rechnen mit Potenzen

2. Vereinfachen Sie.

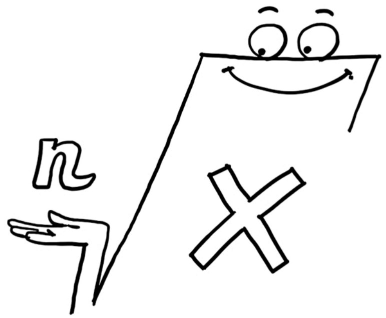
$\left(\frac{x^{-2}}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{x^{2}}{3}\right)^{2}$

3. Lösen Sie die Potenzgleichungen.

a) $\sqrt{2x-1} = 2$

b) $\sqrt[3]{3x} = 1$

c) $x^{\frac{3}{4}} = 0{,}001$

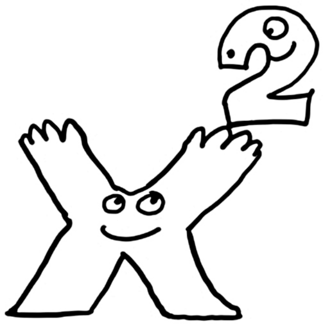


Rechnen mit Potenzen

4. Fassen Sie zu einer Potenz zusammen.

a) $x^{-8} : (-x^{2})$

b) $x^{2}(x-1) - x^{2} : x^{-1} - (2x^{-2})^{-1}$



Rechnen mit Potenzen

5. Ermitteln Sie den Term, der nach Einsetzen von $x = -0{,}5$ den kleinsten Wert liefert.

a) $-\frac{1}{x}$

b) 2^{x}

c) $2^{\frac{1}{x}}$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)^{2}$

e) $\left(\sqrt{-x}\right)^{-1}$