Inhalt

KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg
Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117

Inhalt

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

die Lehr- und Bildungspläne der einzelnen Bundesländer in der Bundesrepublik Deutschland sehen für das Fach Mathematik in der Sekundarstufe I verbindlich vor, u.a. das Thema Trigonometrie im Unterricht zu behandeln. Etliche Schulbücher für Mathematik befassen sich mit der Trigonometrie. Jedoch ist das Manko der allermeisten dieser Bücher:

- Viele Seiten sind zu voll (übervoll).
- Kenntnisse werden vorausgesetzt, die vor allem lern-/leistungsschwächere Schüler* nicht besitzen.
- Mathematisches wird häufig nicht (genügend) allgemeinverständlich erklärt.
- Die Struktur der gestellten Aufgaben ändert sich (zu) häufig.
- Zahlreiche Gedankensprünge werden von den Schülern erwartet.

Kurzum gesagt: Zahlreiche Seiten in den angesprochenen Mathematikbüchern motivieren so manche Schüler nicht, überfordern sie, ja schrecken sie davon ab, sich mit den Texten und Aufgaben auseinanderzusetzen.

Aufgrund der genannten Gegebenheiten entstand der vorliegende Band zur Thematik Trigonometrie. Er ging hervor aus der Schulpraxis, aus meiner langjährigen Tätigkeit als Lehrer (vor allem aus der Arbeit mit lern-/leistungsschwächeren Heranwachsenden), und wäre sonst überhaupt nicht zustande gekommen.

Der dargebotene Band behandelt die Thematik Trigonometrie allgemeinverständlich in (sehr) kleinen Schritten. Zielsetzungen sind die Vermittlung, Festigung sowie Überprüfung von grundlegenden Kenntnissen sowie Erkenntnissen zur Trigonometrie. In der ersten Hälfte des Bandes geht es nach der Klärung von elementaren Begriffen zu Dreiecken um trigonometrische Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken mit Hilfe der Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens. Die zweite Hälfte des Bandes befasst sich mit trigonometrischen Berechnungen in beliebigen Dreiecken. Dabei werden gründlich zunächst der Sinussatz, später der Kosinussatz thematisiert. Für die Schüler heißt es, den Sinussatz und Kosinussatz situationsbezogen anzuwenden. Der präsentierte Band hält u.a. Tests/Arbeiten bereit, mit denen der jeweilige Lern- und Leistungsstand der Schüler überprüft werden kann. Die im Band dargebotenen Materialien wurden des Öfteren in der Schulpraxis erprobt und bewährten sich. Sie trugen zu besseren mathematischen Kenntnissen der Heranwachsenden bei.

Für Hinweise auf etwaige Fehler im Band und sonstige Verbesserungsvorschläge sei an dieser Stelle im Voraus gedankt. Viele Erfolge beim Einsatz der präsentierten Materialien im Unterricht wünscht Ihnen das Team des Kohl-Verlages und

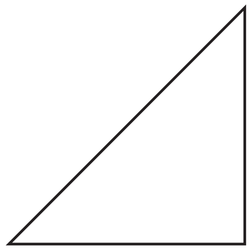
Friedhelm Heitmann

---

* Mit Schülern bzw. Lehrern sind im gesamten Band selbstverständlich auch die Schülerinnen und Lehrerinnen gemeint!

I. Grundlagen

1. Trigonometrie – was ist das?



1. Die Trigonometrie gehört zur Geometrie. Inzwischen bezeichnen allerdings manche Mathematiker die Trigonometrie als ein eigenes Gebiet der Mathematik.

2. Der Begriff Geometrie kommt ursprünglich aus der alten griechischen Sprache und heißt in die deutsche Sprache übersetzt so viel wie Erd(ver)messung, Feldermessung.
   geometria (griech.) = Feldmesskunst

3. In der Geometrie geht es um Punkte, Linien, Winkel, Flächen, Räume …

4. Die Trigonometrie befasst sich bei Dreiecken mit den Beziehungen (= Verhältnissen) zwischen den Winkel- und den Seiten(längen).
   trigonon (griech.) = Dreieck; gonia (griech.) = Winkel; metron (griech.) = Maß

5. Trigonometrie wird manchmal auch als Dreieckswinkelmessung oder Dreiecksberechnung bezeichnet.

6. Schon Wissenschaftler im alten Griechenland besaßen gewisse trigonometrische Kenntnisse.

7. Diese gebrauchten einige damalige Wissenschaftler u.a. dafür, die Entfernungen zwischen der Erde und dem Mond sowie der Sonne zu berechnen.

8. In vielen Bereichen wird die Trigonometrie heute benutzt, z.B. in der Astronomie (= Himmelfahrtskunde), Geodäsie (= Landvermessung), Seefahrt, Luftfahrt, Physik.

9. Durch Anwendung von Regeln (Definitionen, Sätze …) lassen sich bei Dreiecken Winkelgrößen und Seitenlängen berechnen.

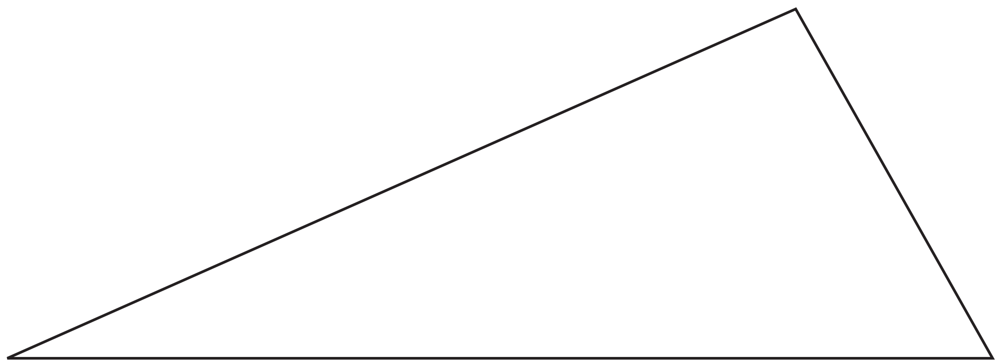
10. Werte bei rechtwinkligen Dreiecken können einfacher berechnet werden als bei nicht rechtwinkligen Dreiecken.

Aufgabe: *Schreibe in eigenen Sätzen auf, was du vom Text „Trigonometrie – was ist das?“ verstanden hast.*

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

I. Grundlagen

2. Ein rechtwinkliges Dreieck (I)



Aufgabe 1: *Benenne die 3 Eckpunkte des rechtwinkligen Dreiecks, beginnend von links gegen den Uhrzeigerverlauf mit A, B und C.*

Aufgabe 2: *Benenne die 3 Seiten des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kleinbuchstaben a, b und c.*

Hinweis: Die Seite a liegt gegenüber vom Eckpunkt A, die Seite b gegenüber vom Eckpunkt B, die Seite c gegenüber vom Eckpunkt C.

Aufgabe 3: *Benenne den Innenwinkel beim Eckpunkt A mit α, den Innenwinkel beim Eckpunkt B mit β sowie den Innenwinkel beim Eckpunkt C mit γ.*

Aufgabe 4: *Kennzeichne den 90º-Winkel (= rechter Winkel) mit einem Punkt vor einem kleinen Kreisbogen ( ).*

Aufgabe 5: *Benenne die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit H, die beiden Katheten mit jeweils K.*

Aufgabe 6: *Der Satz des Pythagoras sagt aus: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse genauso groß wie die Summe der beiden Katheten-Quadrate. Also gilt:*

$H^2 = K_I^2 + K_{II}^2$

Dies bedeutet beim oben vorliegenden Dreieck, dessen eine Kathete 5 cm und dessen andere Kathete 12 cm lang ist:

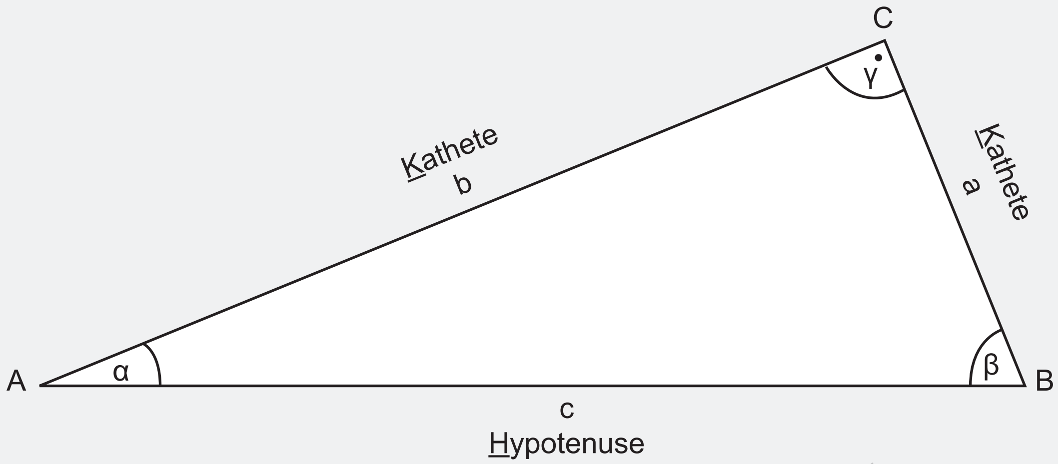
$H^2 = (5\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2$

Berechne, wie lang die Hypotenuse ist.

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

I. Grundlagen

2. Ein rechtwinkliges Dreieck (I) – Lösungen



Aufgabe 1: *Benenne die 3 Eckpunkte des rechtwinkligen Dreiecks, beginnend von links gegen den Uhrzeiger Verlauf mit A, B und C.*

Aufgabe 2: *Benenne die 3 Seiten des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kleinbuchstaben a, b und c.*

Hinweis: die Seite a liegt gegenüber vom Eckpunkt A, die Seite b gegenüber vom Eckpunkt B, die Seite c gegenüber vom Eckpunkt C.

Aufgabe 3: *Benenne den Innenwinkel beim Eckpunkt A mit α, den Innenwinkel beim Eckpunkt B mit β sowie den Innenwinkel beim Eckpunkt C mit γ.*

Aufgabe 4: *Kennzeichne den 90°-Winkel (= rechter Winkel) mit einem Punkt vor einem kleinen Kreisbogen ( ).*

Aufgabe 5: *Benenne die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit H, die beiden Katheten mit jeweils K.*

Aufgabe 6: *Der Satz des Pythagoras sagt aus: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse genauso groß wie die Summe der beiden Katheten--Quadraten. Also gilt:*

$H^2 = K_I^2 + K_{II}^2$

Dies bedeutet beim oben vorliegenden Dreieck, dessen eine Kathete 5 cm und dessen andere Kathete 12 cm lang ist:

$H^2 = (5\ cm)^2 + (12\ cm)^2$

Berechne, wie lang die Hypotenuse ist.

$H^2 = 25\ cm^2 + 144\ cm^2$

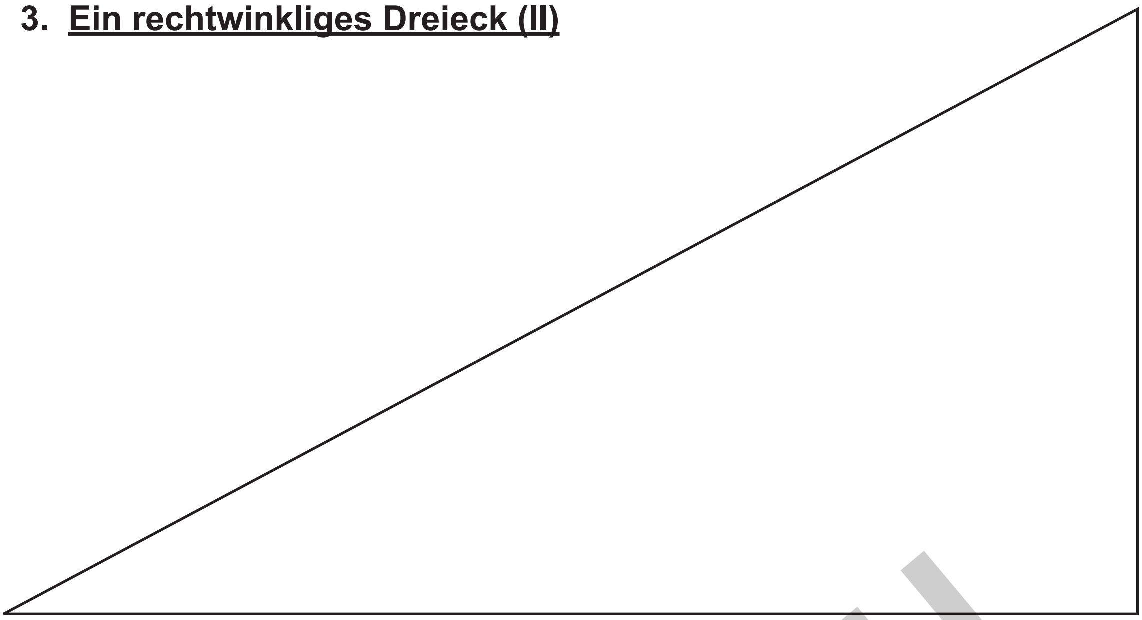
$H^2 = 169\ cm^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{\mathbf{H = 13\ cm}}$

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

I. Grundlagen

3. Ein rechtwinkliges Dreieck (II)



Aufgabe 1: *Benenne die jeweils 3 Eckpunkte, Seiten und Innenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks.*

Aufgabe 2: *Kennzeichne den 90º-Winkel, die Hypotenuse sowie 2 Katheten des rechtwinkligen Dreiecks.*

Aufgabe 3: *Berechne die Länge der Hypotenuse, wenn du weißt: Die eine Kathete ist 15 cm lang, die andere Kathete 8 cm lang.*

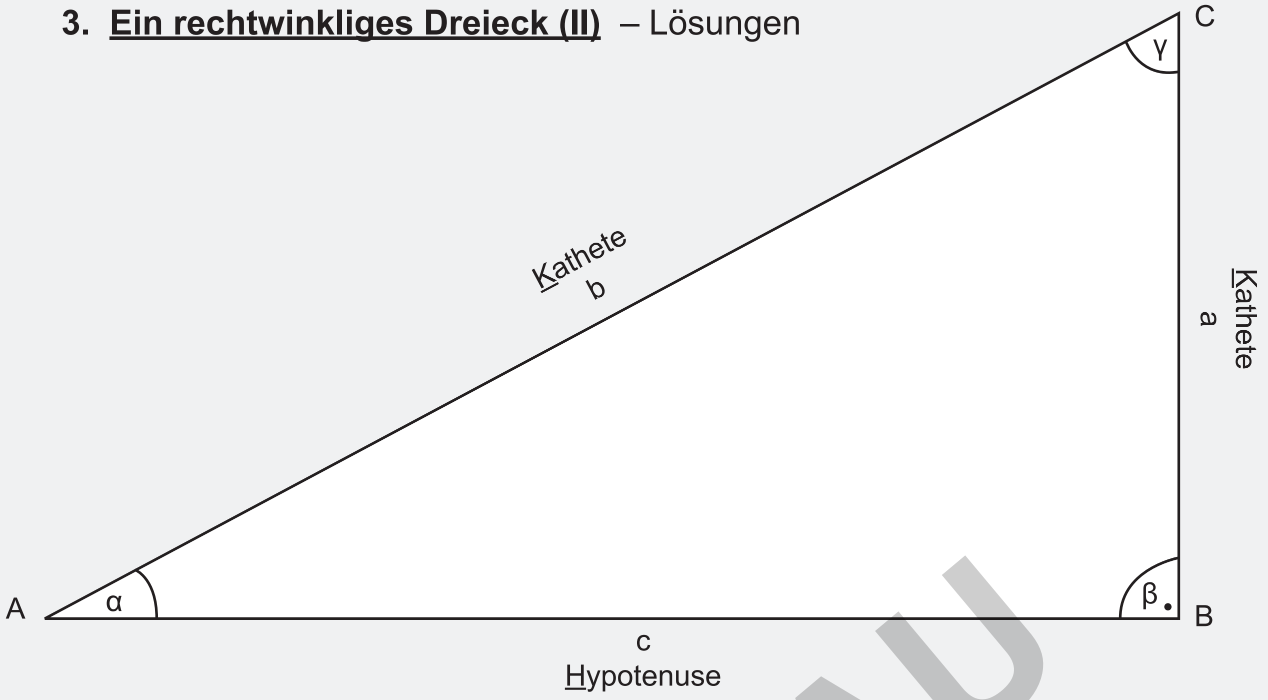
Aufgabe 4: *Berechne die Länge einer Kathete, wenn du weißt: Die andere Kathete ist 15 cm lang, die Hypotenuse ist 17 cm lang.*

Aufgabe 5: *Berechne die Länge einer Kathete, wenn du weißt: Die andere Kathete ist 8 cm lang, die Hypotenuse ist 17 cm lang.*

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

I. Grundlagen

3. Ein rechtwinkliges Dreieck (II) – Lösungen



Aufgabe 1: *Benenne die jeweils 3 Eckpunkte, Seiten und Innenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks.*

Aufgabe 2: *Kennzeichne den 90º-Winkel, die Hypotenuse sowie 2 Katheten des rechtwinkligen Dreiecks.*

Aufgabe 3: *Berechne die Länge der Hypotenuse, wenn du weißt: Die eine Kathete ist 15 cm lang, die andere Kathete 8 cm lang.*

$H^2 = K_I^2 + K_{II}^2$
$H^2 = (15\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2$
$H^2 = 225\text{ cm}^2 + 64\text{ cm}^2$
$H^2 = 289^2 \qquad | \sqrt{}$
$H = 17\text{ cm}$

Aufgabe 4: *Berechne die Länge einer Kathete, wenn du weißt: Die andere Kathete ist 15 cm lang, die Hypotenuse ist 17 cm lang.*

$K_I^2 = H^2 - K_{II}^2$
$K_I^2 = (17\text{ cm})^2 - (15\text{ cm})^2$
$K_I^2 = 289\text{ cm}^2 - 225\text{ cm}^2$
$K_I^2 = 64\text{ cm} \qquad | \sqrt{}$
$K = 8\text{ cm}$

Aufgabe 5: *Berechne die Länge einer Kathete, wenn du weißt: Die andere Kathete ist 8 cm lang, die Hypotenuse ist 17 cm lang.*

$K_{II}^2 = H^2 - K_I^2$
$K_{II}^2 = (17\text{ cm})^2 - (8\text{ cm})^2$
$K_{II}^2 = 289\text{ cm}^2 - 64\text{ cm}^2$
$K_{II}^2 = 225\text{ cm}^2 \qquad | \sqrt{}$
$K_{II} = 15\text{ cm}$

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

V. Überblick und Aufgaben

3. Textaufgaben (Anwendung des Sinus, Kosinus, Tangens in rechtwinkligen Dreiecken)

Aufgabe 1: *Ein Teilstück einer Bergbahnstrecke weist einen Höhenwinkel von 20° auf. Nach wie viel Metern Fahrstrecke gewinnt die Bergbahn auf diesem Teilstück 200 Meter an Höhe?*

Aufgabe 2: *Senkrecht aus der Luft gesehen bilden die 3 kleinen Dörfer A, B und C zueinander ein rechtwinkliges Dreieck. Der rechte Winkel liegt bei B an. Die Entfernung zwischen den Dörfern A und B ist 6 km. Die Strecke von A nach B bildet mit der Strecken von A nach C einen 27°-Winkel. Wie groß ist die Entfernung zwischen den Dörfern A und C?*

Aufgabe 3: *Wie viel Grad beträgt der Anstiegswinkel bei einer Straße, die eine Steigung von 15 % hat?*

Aufgabe 4: *Wie viel Prozent Gefälle hat ein Weg bei einem Neigungswinkel von 12°?*

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

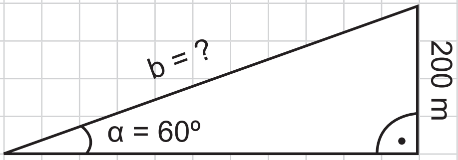
V. Überblick und Aufgaben

3. Textaufgaben (Anwendung des Sinus, Kosinus, Tangens in rechtwinkligen Dreiecken) – Lösungen

Aufgabe 1: *Ein Teilstück einer Bergbahnstrecke weist einen Höhenwinkel von 20° auf. Nach wie viel Metern Fahrstrecke gewinnt die Bergbahn auf diesem Teilstück 200 Meter an Höhe?*

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin 20^\circ = \frac{200\text{ m}}{b} \quad | \cdot b \quad | : \sin 20^\circ$$



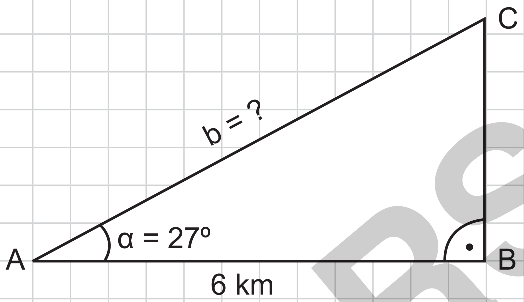
$$b = \frac{200\text{ m}}{\sin 20^\circ}$$

$$b \approx \frac{200\text{ m}}{0{,}3420}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{b \approx 584{,}80\text{ m}}}}$$

Nach einer Fahrstrecke von ca. 584,80 m gewinnt die Bergbahn 200 m an Höhe.

Aufgabe 2: *Senkrecht aus der Luft gesehen bilden die 3 kleinen Dörfer A, B und C zueinander ein rechtwinkliges Dreieck. Der rechte Winkel liegt bei B an. Die Entfernung zwischen den Dörfern A und B ist 6 km. Die Strecke von A nach B bildet mit der Strecken von A nach C einen 27°-Winkel. Wie groß ist die Entfernung zwischen den Dörfern A und C?*



$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

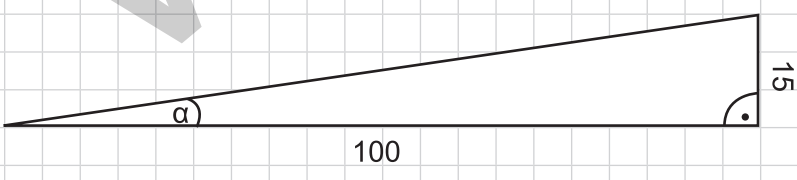
$$\cos 27^\circ = \frac{6\text{ km}}{b} \quad | \cdot b \quad | : \cos 27^\circ$$

$$b = \frac{6\text{ km}}{\cos 27^\circ} \qquad b \approx \frac{6\text{ km}}{0{,}8910}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{b \approx 6{,}73\text{ km}}}}$$

Die Entfernung zwischen den beiden Dörfern A und C beträgt ca. 6,73 km.

Aufgabe 3: *Wie viel Grad beträgt der Anstiegswinkel bei einer Straße, die eine Steigung von 15 % hat?*



$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

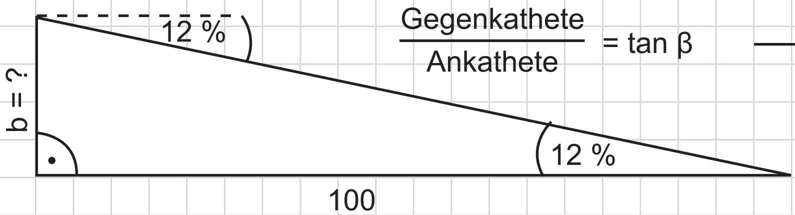
$$\tan\alpha = \frac{15\text{ m}}{100\text{ m}}$$

$$\tan\alpha = 0{,}15$$

$$\underline{\underline{\mathbf{\alpha \approx 8{,}5^\circ}}}$$

Der Anstiegswinkel ist ca. 8,5° groß.

Aufgabe 4: *Wie viel Prozent Gefälle hat ein Weg bei einem Neigungswinkel von 12°?*



$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan\beta \qquad \frac{b}{100} = \tan 12^\circ \quad | \cdot 100$$

$$b = 100 \cdot \tan 12^\circ$$

$$b \approx 100 \cdot 0{,}2125$$

$$\mathbf{b \approx 21{,}25}$$

Der Weg

V. Überblick und Aufgaben

3. Textaufgaben (Anwendung des Sinus, Kosinus, Tangens in rechtwinkligen Dreiecken)

Zeichne maßstabsgerecht eine Skizze und berechne dann, was gefragt ist:

Aufgabe 9: *Ein Teilstück einer Bergbahnstrecke steigt auf einer Länge von 1500 Metern um 10° an. Berechne die Höhendifferenz dieses Teilstückes.*

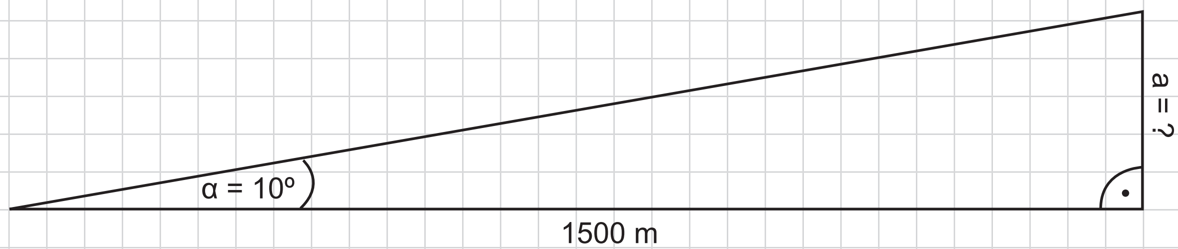
Aufgabe 10: *Aus einer Entfernung von 1200 Metern wird der Start einer Rakete beobachtet, die vom Boden senkrecht in die Luft steigt. Vom Beobachtungspunkt aus wird die Rakete bei der ersten Messung unter einem Höhenwinkel von 15° gesehen. Bei der zweiten Messung wird die Rakete unter einem Höhenwinkel von 25° gesehen. Berechne, um wie viele Meter die Rakete von der ersten bis zur zweiten Messung gestiegen ist.*

V. Überblick und Aufgaben

3. Textaufgaben (Anwendung des Sinus, Kosinus, Tangens in rechtwinkligen Dreiecken) – Lösungen

Zeichne maßstabsgerecht eine Skizze und berechne dann, was gefragt ist:

Aufgabe 9: *Ein Teilstück einer Bergbahnstrecke steigt auf einer Länge von 1500 Metern um 10° an. Berechne die Höhendifferenz dieses Teilstückes.*



$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan\alpha$$

$$\frac{a}{1500\text{ m}} = \tan 10^\circ \quad | \cdot 1500\text{ m}$$

$a = 1500\text{ m} \cdot \tan 10^\circ$

$a \approx 1500\text{ m} \cdot 0{,}1763$

$\mathbf{a \approx 264{,}50\text{ m}}$

Das Teilstück liegt 264,50 m höher.

Aufgabe 10: *Aus einer Entfernung von 1200 Metern wird der Start einer Rakete beobachtet, die vom Boden senkrecht in die Luft steigt. Vom Beobachtungspunkt aus wird die Rakete bei der ersten Messung unter einem Höhenwinkel von 15° gesehen. Bei der zweiten Messung wird die Rakete unter einem Höhenwinkel von 25° gesehen. Berechne, um wie viele Meter die Rakete von der ersten bis zur zweiten Messung gestiegen ist.*

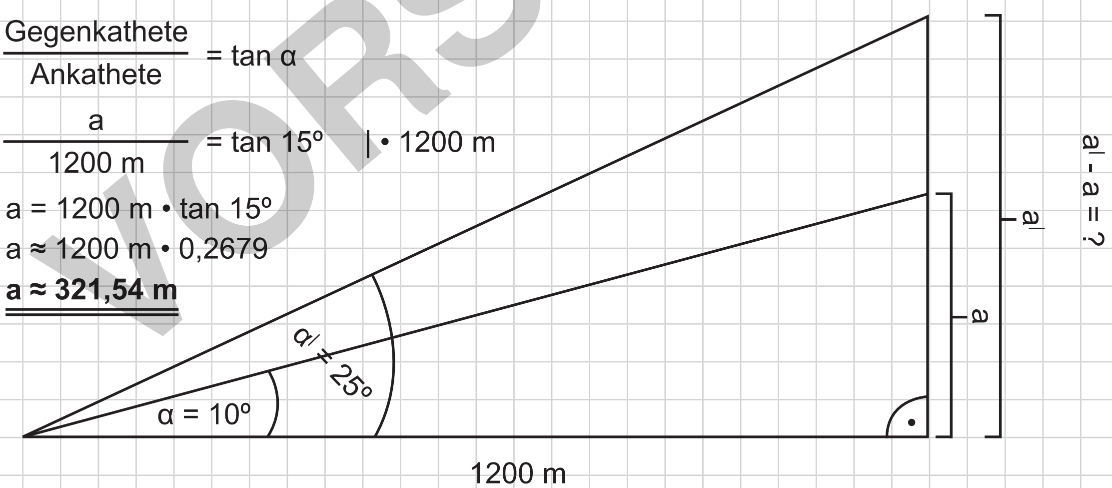
$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan\alpha$$

$$\frac{a}{1200\text{ m}} = \tan 15^\circ \quad | \cdot 1200\text{ m}$$

$a = 1200\text{ m} \cdot \tan 15^\circ$

$a \approx 1200\text{ m} \cdot 0{,}2679$

$\mathbf{a \approx 321{,}54\text{ m}}$



$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan\alpha$$

$$\frac{a'}{1200\text{ m}} = \tan 25^\circ \quad | \cdot 1200\text{ m}$$

$a' = 1200\text{ m} \cdot \tan 25^\circ$

$a' \approx 1200\text{ m} \cdot 0{,}4663$

$\mathbf{a' \approx 559{,}57\text{ m}}$

$$\begin{array}{r} 559{,}57\text{ m} \\ -\ 321{,}54\text{ m} \\ \hline 238{,}03\text{ m} \end{array}$$

Die Rakete ist von der ersten bis zur zweiten Messung um ca. 238,03 m gestiegen.

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

VI. Der Sinussatz

6. Textaufgaben (Anwendungen des Sinussatzes)

Mache bei jeder folgenden Aufgabe zuerst eine Skizze. Notiere dort ein Fragezeichen, was gesucht wird. Benenne in der Skizze, was gegeben ist. Rechne dann aus, was gesucht wird. Unterstreiche das Ergebnis mit zwei Linien. Schreibe zum Schluss einen (kurzen) Antwortsatz.

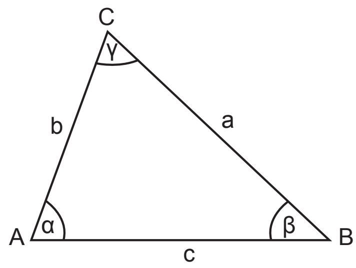
Aufgabe 7: *Ein Hubschrauber wird vom Endpunkt A einer 500 m langen, geraden Standlinie unter einem Höhenwinkel von 35° gesehen. Zur selben Zeit wird dieser Hubschrauber vom Endpunkt B der Standlinie unter einem Höhenwinkel von 65° beobachtet. Berechne, in welcher Höhe sich der Hubschrauber derzeit über der Standlinie befindet.*

Aufgabe 8: *Von den Endpunkten A und B einer 1600 m langen, geraden Straße führen zwei Wanderwege zu einem Rastplatz. Vom Endpunkt A aus gesehen ist der Winkel zwischen der Standlinie und dem Rastplatz 45°. Vom Endpunkt B aus betrachtet ist der Winkel zwischen der Standlinie und dem Rastplatz 95°. Berechne, wie lang beide Wanderwege jeweils sind.*

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG

VI. Der Sinussatz

7. Zwischentest zum Sinussatz



Aufgabe 1: *Für welche geometrischen Figuren gilt der Sinussatz?*

Aufgabe 2: *Wie heißen die 3 Gleichungen des Sinussatzes für die oben rechts vorgegebene geometrische Figur?*

Aufgabe 3: *Warum heißt der Sinussatz so?*

Aufgabe 4: *Was besagt der Sinussatz in Worten?*

Aufgabe 5: *Unter welchen Voraussetzungen lässt sich der Sinussatz sofort anwenden?*

Aufgabe 6: *Wie kann man den Sinussatz beweisen?*

Grundbildung Trigonometrie
Aus der Schulpraxis für die Schulpraxis - Bestell-Nr. P12 117
KOHL VERLAG