Didaktisch-methodische Hinweise

Problemlösen im Mathematikunterricht

Das „Problemlösen“, die Kernkompetenz K 2 in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz, hat in den Lehrplänen und anderen Veröffentlichungen zu Zielen des Mathematikunterrichts einen hohen Stellenwert[1]. Die daraus resultierende Forderung nach einem Unterricht, der diese Kompetenz vermittelt, wird einhellig akzeptiert. Die tatsächliche Umsetzung im Unterricht stellt allerdings eine schwierige und herausfordernde Aufgabe dar.

Viele Didaktiker meinen, das Problemlösen könne nur beim Lösen von mathematischen Problemen gelernt werden. Die Unterrichtserfahrung bestätigt das, trotzdem ist offen, ***wie*** das geschehen soll. Beim „Problemlösen“ gibt es nämlich keine Formel, keinen bestimmten Rechenweg, den man im Unterricht gelernt oder geübt hat. Man muss sich den **Ansatz**, mit dem man eine solche Aufgabe angehen will, selbst zurechtlegen. Zum „Problemlösen“ gehören darüber hinaus solide Vorkenntnisse und eingeübte Fertigkeiten.

Eine Möglichkeit, weiterzukommen: Betrachten Sie Spezialfälle!

Wie hat man sich einem Problem gegenüber zu verhalten, wenn man es erfolgreich anpacken und lösen will? Über dieses Thema gibt es viele Artikel und Bücher. Ein Klassiker unter den Büchern ist wohl ***Schule des Denkens*** von G. Polya[2]. Im Vorwort heißt es:

„Die Lösung eines großen Problems stellt eine große Entdeckung dar, doch in der Lösung eines jeden Problems steckt etwas von einer Entdeckung. Deine Aufgabe mag noch so bescheiden sein; wenn sie jedoch dein Interesse weckt, wenn deine Erfindungsgabe angeregt wird und du die Aufgabe aus dir selbst heraus löst, so wirst du die Spannung und den Triumpf eines Entdeckers erfahren. Wenn solche Erfahrungen in einem Alter, das für Eindrücke empfänglich ist, gemacht werden, so mag das den Sinn für geistige Arbeit hervorrufen.“

In diesem Beitrag zeigen wir, wie man – angeregt von G. Polyas Heuristik (= Erfindungskunst) – an eine konkrete Aufgabenstellung herangehen kann. Ihm folgend betrachten wir zunächst Spezialfälle.

Vorbereitung der Lerntheke

Kopieren Sie das Material **M 1** auf Folie, und werfen Sie es mit dem OHP für alle Schüler gut sichtbar an die Wand. Fertigen Sie für jeden Schüler von den Materialien **M 2–M 5** jeweils eine Kopie an. Legen Sie die Materialstapel an der Fensterbank aus, sodass sich jeder Schüler nach Bedarf die Materialien holen kann. Kopieren und laminieren Sie die **Tippkarten (M 6)** und auch die Lösungen **(L 2–L 5),** und legen Sie diese gesondert am Lehrertisch aus. Zur Methode „Lerntheke“ vgl. auch:

https://lehrerfortbildung-bw.de/bs/bsueb/if/unterrichtsgestaltung/methodenblaetter/lerntheke.html

Verlauf

Zum Einstieg nimmt sich jeder Schüler eine Kopie von Material **M 1.** Es empfiehlt sich, Ihre Schüler diese **„Anleitung zum Auffinden des Schatzes“** im **Rollenspiel**[3] tatsächlich befolgen zu lassen. Im anschließenden Unterrichtsgespräch sucht die Klasse nach einem geeigneten **Lösungsverfahren.**

[1] siehe z. B. Bildungsstandards Mathematik Baden-Württemberg, S. 92; http://www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/Bildungsstandards/Gym/Gym_M_bs.pdf

[2] G. Polya: Schule des Denkens. Francke Verlag, Bern 1949. Sammlung Dalp

[3] https://lehrerfortbildung-bw.de/bs/bsueb/if/unterrichtsgestaltung/methodenblaetter/rollenspiel.html

Beispiel für ein Rollenspiel als Einstieg in die Unterrichtseinheit

Es gibt vier Schatzsucher, die die Anleitung (**M 1**) nachspielen. Die Lehrkraft ist der Pirat. Sie kontrolliert, ob die Fahnen richtig gesteckt wurden.

Schüler: *Wie soll man an diese Fragestellung herangehen?*

Lehrkraft: *Zunächst muss man verstehen, worum es überhaupt geht. Wie bekommt man die Problematik, um die es hier geht, in den Griff? Ein probates Mittel ist es, das Ganze anhand eines **Spezialfalls** durchzuspielen. Dazu nehmen wir an, das Ganze spiele sich auf einem Zeichenblatt ab. Den Ort des Galgens setzen wir (willkürlich) an verschiedenen Orten fest."*

Teilen Sie Ihre Klasse danach in Gruppen ein. Die einzelnen Gruppen bearbeiten Material **M 2** jeweils für verschieden vorgegebene Orte des Galgens. Das gemeinsame Ergebnis (**L 2a, L 2b, L 2c**) lässt vermuten: Wo immer man startet, in G_1, G_2 oder G_3, man kommt immer **zur selben Stelle des Schatzes**. Das ermutigt, das Problem **allgemeingültig** zu lösen.

In der Schule des Denkens heißt es: *„Die eigentliche Leistung bei der Lösung einer Aufgabe ist es allerdings, die Idee eines **Planes** auszudenken. Diese Idee mag langsam auftauchen, sie kann aber auch nach anscheinend erfolglosen Versuchen und einer Periode des Zögerns plötzlich in einer Erleuchtung als ein **„Geistesblitz"** auftauchen. Eine gute Idee ist ein Glücksfall, eine Inspiration, eine Gabe der Götter."*

Das mathematische Problem dieses Beitrages

Bei dem vorliegenden Problem werden geradlinig verlaufende Strecken nach einer bestimmten Regel aneinandergehängt. Es liegt nahe, die Konstruktion mithilfe von **Vektoren** zu beschreiben (das ist der „Geistesblitz", von dem Polya spricht). Die Idee, Vektoren zu benutzen, ergibt sich, wenn Sie Ihren Schülern die Situation z. B. nochmals anhand der Abbildung in **M 3** verdeutlichen. Dort zeigen die Pfeile die Richtung an, in die gegangen werden soll. Gleichzeitig stellen diese Pfeile Vektoren dar.

Ihre Schüler bearbeiten nun – weiter gruppenweise – die ausstehenden Materialien **M 3, M 4** und **M 5**. Insbesondere Material **M 4** bringt den entscheidenden Schritt: die koordinatenweisen Darstellungen zweier gleich langer Vektoren in der Ebene, die aufeinander senkrecht stehen. In Material **M 5** wird alles zusammengetragen. Ob die Schüler richtig gerechnet haben, können sie mithilfe der Karten **L 2–L 5** überprüfen.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 1, K 4, K 6	L 2, L 3	... entnehmen einem Text mathematische Information (**M 1**),	I–II
K 1–K 5	L 2, L 3	... arbeiten in Kleingruppen konstruktiv zusammen und diskutieren über ihre Lösungen in der Gruppe (**M 2–M 5**),	II, III
K 2, K 5	L 2, L 3	... fassen Ergebnisse zusammen (**M 5**),	II, III
K 2, K 4, K 6	L 3, L 4	... wenden solide Vorkenntnisse aus der Analytischen Geometrie an und lösen das Problem allgemeingültig (**M 3–M 5**).	I–III

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf der beiliegenden CD-ROM 63.

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
Einstieg M 1	**Wo war bloß der Galgen? – Eine Schatzsuche** M 1 wird gelesen; Ihre Schüler befolgen die Anleitung zum Auffinden des Schatzes in Form eines Rollenspiels	1.
M 2	**Galgen mal hier, mal dort! – Spezialfälle durchspielen** Untersuchung des Problems anhand von Spezialfällen	2.
M 3	**Vektoren –wir lösen das Problem allgemeingültig!** Geistesblitz: mit Vektoren die Situation beschreiben	3./4.
M 4	**Vektoren drehen – Zwischenüberlegung** Koordinatenweise Darstellung zweier gleich langer Vektoren in der Ebene, die so zueinander liegen, dass sie miteinander einen Winkel von 90° einschließen	
M 5	**Dort ist der Schatz vergraben!** Allgemeingültige Lösung des Problems: Der Ortsvektor des Mittelpunktes der Strecke $\overline{F_1F_2}$ ist unabhängig von den Koordinaten des Galgens!	5.
M 6	**Tippkarten**	

Lehrplanbezug

In **Bayern**[3] sind für die **Koordinatengeometrie im Raum** in Klasse 11 ca. 22 Unterrichtsstunden vorgesehen. In **Sachsen** steht die **Vektorrechnung** im Lernbereich 3 der Jahrgangsstufe 12 mit Richtstundenzahl 15 im Lehrplan[4]. In **Baden-Württemberg** (und auch in den anderen Bundesländern) sind Aufgaben aus dem Bereich der **Analytischen Geometrie** (wozu vornehmlich auch der sichere Umgang mit Vektoren gehört) Gegenstand der schriftlichen **Abiturprüfung**[5]. Im Lehrplan **NRW** findet man zum **Problemlösen** den Absatz: „Die mathematische Bearbeitung außer- oder innermathematischer Kontexte führt immer wieder zu Problemstellungen, die (zunächst) nicht schematisch oder in direkter Anlehnung an bekannte Muster und Verfahren bearbeitet werden können. Das Problemlösen ist der Prozess der Bearbeitung solcher Problemstellungen durch Erkunden, Lösen durch Anwendung heuristischer Strategien und Reflektieren von Lösungsansätzen.[6] Vektoren und Vektoroperationen nehmen auch in diesem Lehrplan einen breiten abiturrelevanten Raum ein.

[3] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192

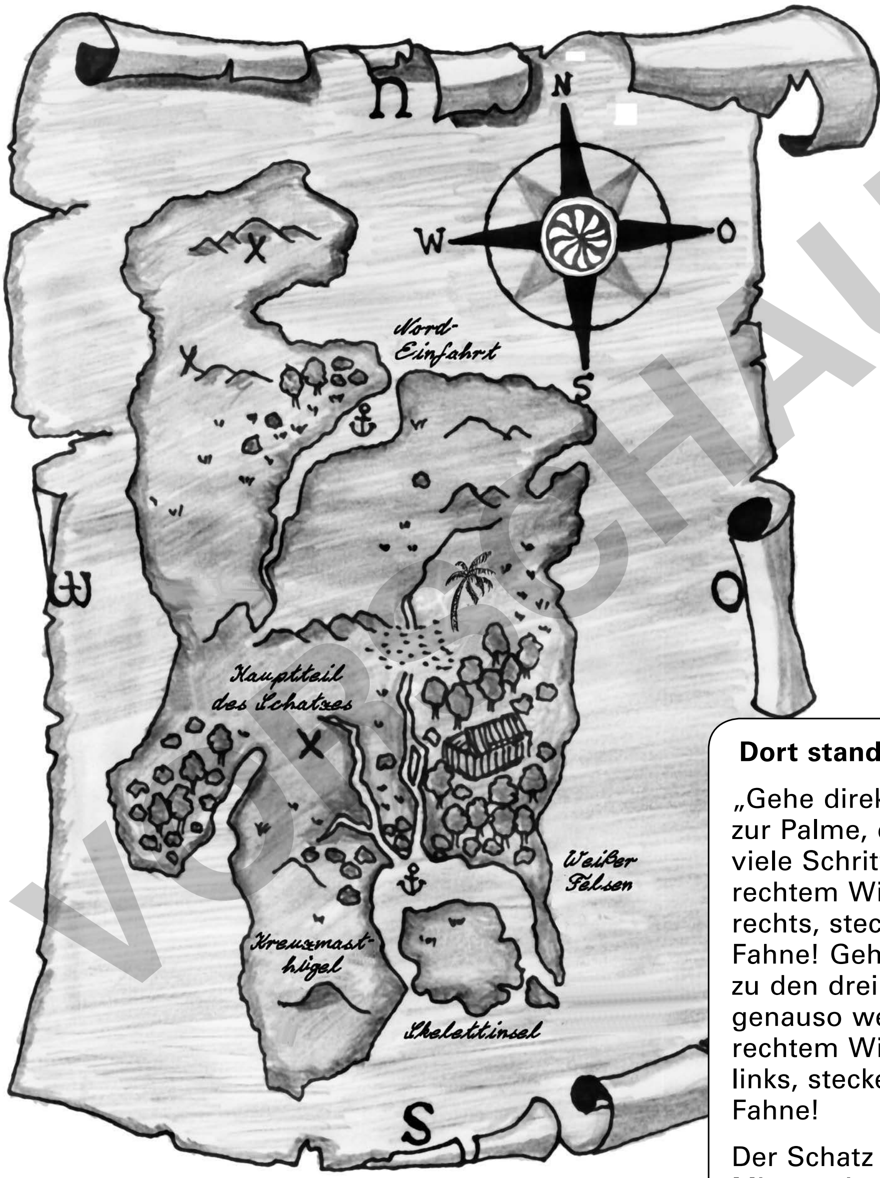
[4] LP Freistaat Sachsen, S. 91; http://marvin.sn.schule.de/~gymengel/content/schule/faecher/mathe/download/lehrplan.pdf

[5] Schwerpunktthemen schriftliche Abiturprüfung Baden-Württemberg; https://rp.baden-wuerttemberg.de/rps/Abt7/Ref75/Documents/schwerpunktthemen_abitur_2016.pdf

[6] http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

M 1 Wo war bloß der Galgen? – Eine Schatzsuche

Edward Thatch, genannt „Schwarzbart“, war der gefürchtetste Pirat der Karibik; er trug stets eine Pistole bei sich und vergrub seine Beute auf einer einsamen Insel vor Tortuga. Lange nachdem Schwarzbart im Kampf auf See gefallen war, fand man seine Schatzkarte.



Die Schatzkarte von Schwarzbart

Thatch, genannt „Schwarzbart“

Dort stand geschrieben:

„Gehe direkt vom Galgen zur Palme, dann gleich viele Schritte unter rechtem Winkel nach rechts, stecke die erste Fahne! Gehe vom Galgen zu den drei Felsbrocken, genauso weit unter rechtem Winkel nach links, stecke die zweite Fahne!

Der Schatz liegt in der Mitte zwischen den beiden Fahnen.“

Die Palme und die Steine waren noch da; der Galgen war längst abgetragen. Der Suchtrupp stieß in dem ebenen Gelände trotzdem mit dem ersten Spatenstich auf die Schatzkiste, obwohl man von einer „falschen“ Stelle aus gezählt hatte. War das Zufall?

M 5 Dort ist der Schatz vergraben!

Jetzt haben Sie alles beieinander, um das Problem allgemeingültig lösen zu können.

Edward Thatch

Aufgabe

Wir beziehen uns auf die Zeichnung in **M 3** (siehe nochmals unten) und stellen fest:

Für den Ortsvektor zur ersten Fahne F_1 gilt:

$\overrightarrow{OF_1} = \vec{p} + \overrightarrow{PF_1}$

Wir wissen, dass man $\overrightarrow{PF_1}$ erhält, indem man $\overrightarrow{GP}$ um 90° im Uhrzeigersinn dreht.

a) Ergänzen Sie:

Für $\overrightarrow{GP}$ gilt die Darstellung $\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} p_1 - g_1 \\ p_2 - g_2 \end{pmatrix}$, womit für den gleich langen Vektor $\overrightarrow{PF_1} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix}$ gilt.

Für den Ortsvektor zur zweiten Fahne F_2 gilt:

$\overrightarrow{OF_2} = \vec{f} + \overrightarrow{FF_2}$

Wir wissen, dass man $\overrightarrow{FF_2}$ erhält, indem man $\overrightarrow{GF}$ um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn dreht.

b) Ergänzen Sie:

Für $\overrightarrow{GF}$ gilt die Darstellung $\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} f_1 - g_1 \\ f_2 - g_2 \end{pmatrix}$, womit für $\overrightarrow{FF_2} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix}$ gilt.

Wir setzen dies ein in

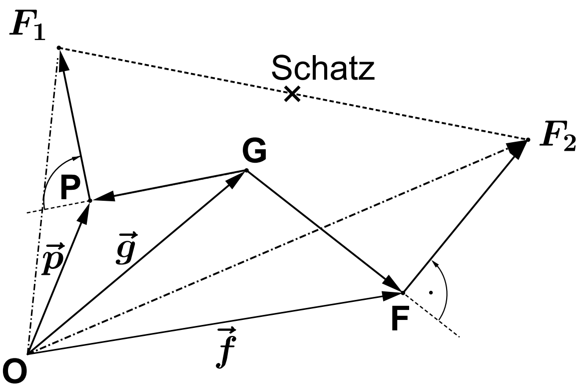
$\overrightarrow{OF_1} = \vec{p} + \overrightarrow{PF_1} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

und

$\overrightarrow{OF_2} = \vec{f} + \overrightarrow{FF_2} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Der Schatz ist am Mittelpunkt der Strecke $\overline{F_1F_2}$ vergraben.

Jetzt sollten Sie die Rechnung zu Ende führen können.



Zeichnung in M 3

Schatz