Inhalt

Methodisch-didaktische Hinweise

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

dieses Werk „Polynomdivision und Substitution“ soll Ihnen Ihre alltägliche Arbeit im Unterrichtsfach Mathematik erleichtern sowie den Schülern* die Möglichkeit geben, die genannten mathematischen Teilbereiche durch Übungsaufgaben ausreichend zu trainieren. Geeignete Arbeitsblätter und Aufgabensammlungen zur Mathematik im Sekundarbereich II findet man selten. Das vorliegende Werk soll hier die bestehende Lücke an Materialien füllen und Ihnen bei Ihrer täglichen Arbeit hilfreich zur Seite stehen.

Die Methoden der Polynomdivision und Substitution stellen für viele Schüler eine hohe Verständnishürde dar, die oftmals nicht ohne besondere und zeitintensive Zuwendung der unterrichtenden Lehrkraft auskommt. Dabei sind die beiden Teilthemen der Mathematik in der Sekundarstufe II grundlegend für ein erfolgreiches Bestehen bei Aufgaben zur Kurvendiskussion und generell in der höheren Mathematik.

Wichtige Methoden und Begriffe werden anhand kleinschrittiger Beispiele eingeführt. Der klare strukturelle Aufbau des Lehrtextes wird in dieser Weise instruktiv unterstützt.

Die exemplarischen mathematischen Operationen können als Basis für das Unterrichtshandeln genutzt werden und dafür fungieren. Denkbar sind hier diverse Möglichkeiten:

- Die Schüler lesen das Beispiel und die dazugehörige Lösung als Muster und können nun anhand dieser Informationen weitere Übungen im gleichen Stil erarbeiten.
- Die Beispiele und die dazugehörigen Musterlösungen können als Grundlage für ein Schüler-Referat dienen, das der gesamten Lerngruppe präsentiert wird.

Die Bearbeitungsvarianten können als Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit durchgeführt werden.

Viel Freude beim Einsatz der vorliegenden Materialien in Ihrem Unterricht sowie in der Arbeit mit Ihren Schülerinnen und Schülern wünschen Ihr Kohl-Verlagsteam und

Tobias Vonderlehr

* Mit Schülern und Lehrern sind selbstverständlich auch immer Schülerinnen und Lehrerinnen gemeint. Die männliche Form dient lediglich der einfacheren Lesb...

Definitionen:

Polynome sind Summen aus Ausdrücken $a_n \cdot x^n$, wobei n eine natürliche Zahl N (hier einschließlich der 0) darstellt und a_n eine Zahl, den Koeffizienten der jeweiligen Potenz von x. Man ordnet sie üblicherweise nach absteigenden Potenzen von x.

Beispiel:

$\mathbf{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}$ (3x ist $3 \cdot x^1$, und 10 ist $10 \cdot x^0$, denn $x^0=1$, für alle $x \neq 0$)

Der Koeffizient a_0 (im Beipiel die -10) heißt auch <u>absolutes Glied</u>, der Summand mit x auch <u>lineares Glied</u>, der mit x^2 <u>quadratisches Glied</u>, der mit x^3 <u>kubisches Glied</u>.

Der Grad des Polynoms ist die höchste Potenz von x.

Beispiele:

das Polynom $\mathbf{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}$ besitzt den Polynomgrad **3**,

das Polynom $\mathbf{x^7 - x^3 + 3x - 1}$ den Polynomgrad **7**.

Rechnerischer Umgang mit Polynomen

Man kann Polynome addieren und subtrahieren:

Dabei werden jeweils gleichnamige Summanden (das sind Summanden mit der gleichen Potenz von x) zusammengefasst.

Beispiel zur Addition:

$$(\mathbf{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}) + (\mathbf{2x^3 - 6x^2 + 1}) = 3x^3 + 3x - 9$$

Beispiel zur Subtraktion:

$$(\mathbf{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}) - (\mathbf{x^3 - 3x^2 + 4x - 7}) = 9x^2 - x - 3$$

Man kann Polynome auch miteinander multiplizieren. Das ist bereits vom Ausmultiplizieren von Klammern bekannt:

Beispiel:

$$\mathbf{(x^2 + 3x - 7)\ (5x - 2)}$$
$$= 5x^3 + 15x^2 - 35x - 2x^2 - 6x + 14$$
$$= 5x^3 + 13x^2 - 41x + 14$$

Es gibt auch eine Division von Polynomen (u.U. mit Rest).

Wenn zwei Polynome A_1 und A_2 gegeben sind, so gibt es immer zwei weitere Polynome B und C, sodass gilt:

$$\mathbf{A_1 = B \cdot A_2 + C.}$$

Wenn A_1 und A_2 bekannt sind, gewinnt man B und C durch die (Polynom-)Division $A_1 : A_2$.

Dann ist B der Quotient und C der Rest. Also

$$\mathbf{A_1 : A_2 = B \text{ Rest } C}$$

Ein Blick über den Tellerrand:

Bei der Division von ganzen Zahlen, die aus der Grundschule noch bekannt sein sollte, existiert auch eine Division mit Rest.

Wenn man die Zahl x durch die Zahl y teilt, dann passt sie b mal hinein und es bleibt (möglicherweise) der Rest c.

Beispiel:

127 : 5 = 25 Rest 2 (x = 127, y = 5, b = 25, c = 2)

Das kann man auch so schreiben: $127 = 25 \cdot 5 + 2$ oder mit den Variablen: $x = b \cdot y + c$.

Der Rest ist bei der Division von natürlichen Zahlen immer kleiner als der Divisor. Analog hat der Rest R bei der Polynomdivision $A_1 : A_2$ immer einen kleineren Polynomgrad als der Divisor A_2.

Beim schriftlichen Dividieren von ganzen Zahlen zieht man vom Dividenden nach und nach passende Vielfache des Divisors ab. Wie oft der Divisor dabei jeweils in den Dividenden hineinpasst, ergibt nach und nach das Ergebnis, den Quotienten. Bei der Polynomdivision funktioniert es im Grunde genauso, wie gleich an einem Beispiel gezeigt werden soll. Man zieht vom Dividenden passende Vielfache des Divisors ab, bis kein Rest bleibt oder der Rest einen kleineren Polynomgrad als der Divisor besitzt.

Ausführliches Beispiel

Das Polynom $\mathbf{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}$ soll durch das Polynom $\mathbf{x + 5}$ geteilt werden:

also: $\mathbf{(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 5) =}$

Man überlegt zuerst, wie oft (x + 5) in das erste Polynom hineinpasst. Das ist hier natürlich etwas unklarer als bei Zahlen. Man betrachtet dabei stets die höchste Potenz aus beiden Polynomen (also x^3 aus dem ersten und x aus dem zweiten Polynom) und fragt, wie oft x in x^3 hineinpasst. Anders gefragt: Mit was muss man x malnehmen, damit x^3 herauskommt? – Natürlich mit x^2. Das ist das erste Glied unseres Ergebnisses:

$$(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 5) = x^2$$

weil: $x^3 = x \cdot x^2$

Wie bei der Division von Zahlen nimmt man nun den neuen Bestandteil des Ergebnisses mal den Divisor und schreibt ihn passend unter den Dividenden („passend“ bedeutet hier, gleiche Potenzen von x untereinander zu schreiben):

$$\begin{array}{l} (x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 5) = x^2 \\ (x^3 + 5x^2) \end{array}$$

weil: $(x^3 + 5x^2) = (x + 5) \cdot x^2$

Dabei wird (wie bereits erwähnt) darauf geachtet, dass gleiche Potenzen von x untereinander stehen. Nun wird subtrahiert und (im Unterschied zur Division von Zahlen) der Rest stellengerecht nach unten geholt:

$$\begin{array}{l} (x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x + 5) = x^2 \\ \underline{-(x^3 + 5x^2)} \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad\quad x^2 + 3x - 10 \end{array}$$

weil: $x^2 = 6x^2 - 5x^2$

Aufgabe 1:

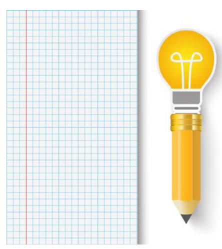
$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 3) =$

Aufgabe 2:

$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 1) =$

Aufgabe 3: *Berechne in deinem Heft.* $(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x - 1)$

Aufgabe 4: *Berechne in deinem Heft.* $(x^3 - 13x - 12) : (x + 3)$



Aufgabe 17: *Bestätige, dass die angegebene Zahl x_1 die Gleichung $f(x_1) = 0$ erfüllt und bestimme alle weiteren Lösungen mittels Polynomdivision.*

a) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 7x - 18$ ($x_1 = 1$)

b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 22x - 56$ ($x_1 = 4$)

c) $f(x) = 4x^3 + 27x^2 + 54x + 27$ ($x_1 = -3$)

d) $f(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$ ($x_1 = 2$)

e) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ ($x_1 = 0{,}5$)

f) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$ ($x_1 = 2$)

g) $f(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$ ($x_1 = 0{,}5$)

h) $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ ($x_1 = 1$)

Aufgabe 18: *Gib den Grad der ganzrationalen Funktion an.*

a) $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + x^2 - 12x + 3$

b) $f(x) = 9x^8 + 6x^7 - 6x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x + 13$

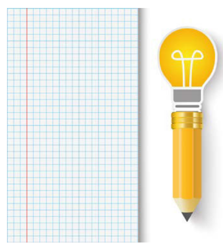
c) $f(x) = 5x^3 - x$

d) $f(x) = 3x^6 - 3x^2 + 5$

e) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 17x + 6$

Aufgabe 19: *Berechne in deinem Heft.* $(-x^3 - 5x^2 - 12x - 12) : (x + 2)$

Aufgabe 20: *Berechne in deinem Heft.* $(-3x^3 - 17x^2 - 7x + 15) : (x + 5)$



Aufgabe 25: *Es muss nicht immer f(x) sein.*

a) $(6r^3 - 12r^2 - 6r + 12) : (r - 2)$

b) $(s^3 + 12s^2 + 34{,}25s - 10{,}5) : (s + 6)$

c) $(5t^3 - 17t^2 + 9t + 10) : (t - 2)$

d) $(m^3 - 6m^2 - 5m + 30) : (m - 6)$

e) $(n^3 - 13n - 12) : (n + 3)$

f) $(z^3 + 3z^2 - z - 3) : (z - 1)$

Aufgabe 1: *Führe eine Polynomdivision mit Rest durch.*

a) $(x^4 - 7x^2 + x - 1) : (x - 2)$

b) $(x^3 - 7x^2 + x + 5) : (x^2 + 2x - 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$

d) $(x^4 + x^2 - 2x + 1) : (x^2 - 1)$

e) $(x^4 - 2x) : (x + 5)$

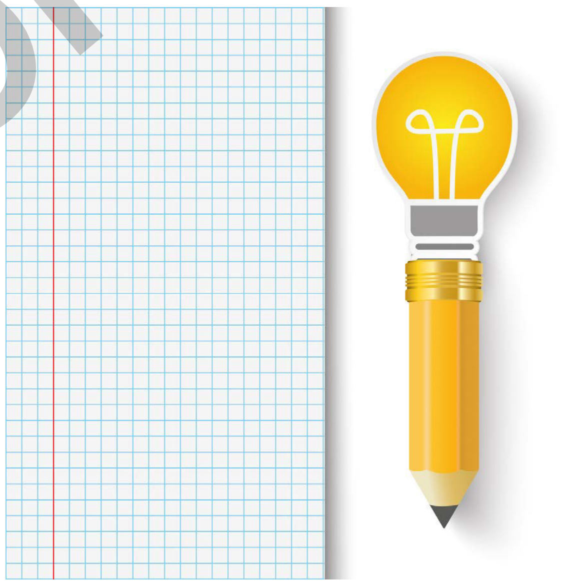
f) $(x^3 - x^2 + 2x - 5) : (x^2 - 3)$

Aufgabe 2: *Überprüfe, ob die angegebene Zahl x_1 die Gleichung $f(x_1) = 0$ erfüllt. Führe anschließend eine Polynomdivision mit oder ohne Rest durch.*

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 12$ $(x_1 = 4)$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ $(x_1 = 1)$

c) $f(x) = x^3 - 1{,}75x + 0{,}75$ $(x_1 = 1)$



$$
\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}\right):(x-1)=\frac{1}{9}x^2\\
-\underline{\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2\right)}\\
\qquad\qquad -\frac{2}{9}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}
\end{array}
$$

Mit diesem Term wiederholen wir das Dividieren erneut. Wir teilen den unteren ersten Summanden durch den ersten Summanden der zweiten Klammer und addieren dieses Ergebnis hinter das, was schon hinter dem Gleichheitszeichen steht. Das, was wir als Letztes hinter unserem Gleichheitszeichen addiert haben, multiplizieren wir mit der zweiten Klammer und schreiben das Ergebnis unter den untersten Term. Danach subtrahieren wir beide unteren Terme.

$$
\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}\right):(x-1)=\frac{1}{9}x^2+\left(-\frac{2}{9}x\right)\\
-\underline{\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2\right)}\\
\qquad\qquad -\frac{2}{9}x^2-\frac{8}{3}x\\
\qquad\quad -\underline{\left(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{26}{9}\right)}\\
\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{26}{9}x+\frac{26}{9}
\end{array}
$$

Den Schritt müssen wir so häufig wiederholen, bis wir fertig sind.

$$
\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}\right):(x-1)=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\left(-\frac{26}{9}\right)\\
-\underline{\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2\right)}\\
\qquad\qquad -\frac{2}{9}x^2-\frac{8}{3}x\\
\qquad\quad -\underline{\left(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{26}{9}\right)}\\
\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{26}{9}x+\frac{26}{9}\\
\qquad\qquad\qquad -\underline{\left(-\frac{26}{9}x+\frac{26}{9}\right)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Aufgabe 11: *Löse durch Substitution.*

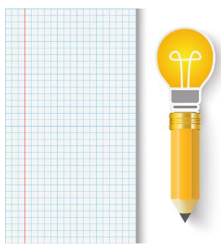
$5x^4 - 40x^2 - 45 = 0$

Aufgabe 12: *Löse durch Substitution.*

$2x^4 + 16x^2 + 30 = 0$

Aufgabe 13: *Berechne.* $-2x^4 - 90x^2 - 648 = 0$

Aufgabe 14: *Berechne.* $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$



Aufgabe 15:

a) keine Lösung für z $\rightarrow$ keine Lösungen für x

b) $z_1 = 4, z_2 = -6 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

c) $z_1 = 4, z_2 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 0$

d) $z_1 = 5 \rightarrow x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$

e) $z_1 = 4, z_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$

Aufgabe 16:

$z_1 = 4, z_2 = -1 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

Aufgabe 17:

$z_1 = 8, z_2 = -1 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$

Aufgabe 18:

a) $z_1 = 4, z_2 = -1 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

b) $z_1 = 3, z_2 = 2 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$

c) $z_1 = -1, z_2 = -25 \rightarrow$ keine Lösungen für x

d) $z_1 = 4, z_2 = 36 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 6, x_4 = -6$

Aufgabe 19:

$z_1 = 1, z_2 = -9 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

Aufgabe 20:

a) $z_1 = 49, z_2 = -2 \rightarrow x_1 = 7, x_2 = -7$

b) $z_1 = 100, z_2 = 1 \rightarrow x_1 = 10, x_2 = -10, x_3 = 1, x_4 = -1$

c) $z_1 = 36, z_2 = -2 \rightarrow x_1 = 6, x_2 = -6$

d) $z_1 = 49, z_2 = -4 \rightarrow x_1 = 7, x_2 = -7$

e) $z_1 = 16, z_2 = -3 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = -4$

f) $z_1 = 25, z_2 = 1 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = -5, x_3 = 1, x_4 = -1$

Aufgabe 21:

$z_1 = 16, z_2 = 1 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1, x_4 = -1$

Aufgabe 22:

a) $z_1 = 49, z_2 = -2 \rightarrow r_1 = 7, r_2 = -7$

b) $z_1 = 100, z_2 = 1 \rightarrow s_1 = 10, s_2 = -10, s_3 = 1, s_4 = -1$

c) $z_1 = 36, z_2 = -2 \rightarrow t_1 = 6, t_2 = -6$

d) $z_1 = 49, z_2 = -4 \rightarrow m_1 = 7, m_2 = -7$

e) $z_1 = 16, z_2 = -3 \rightarrow n_1 = 4, n_2 = -4$

f) $u_1 = 25, u_2 = 1 \rightarrow z_1 = 5, z_2 = -5, z_3 = 1, z_4 = -1$