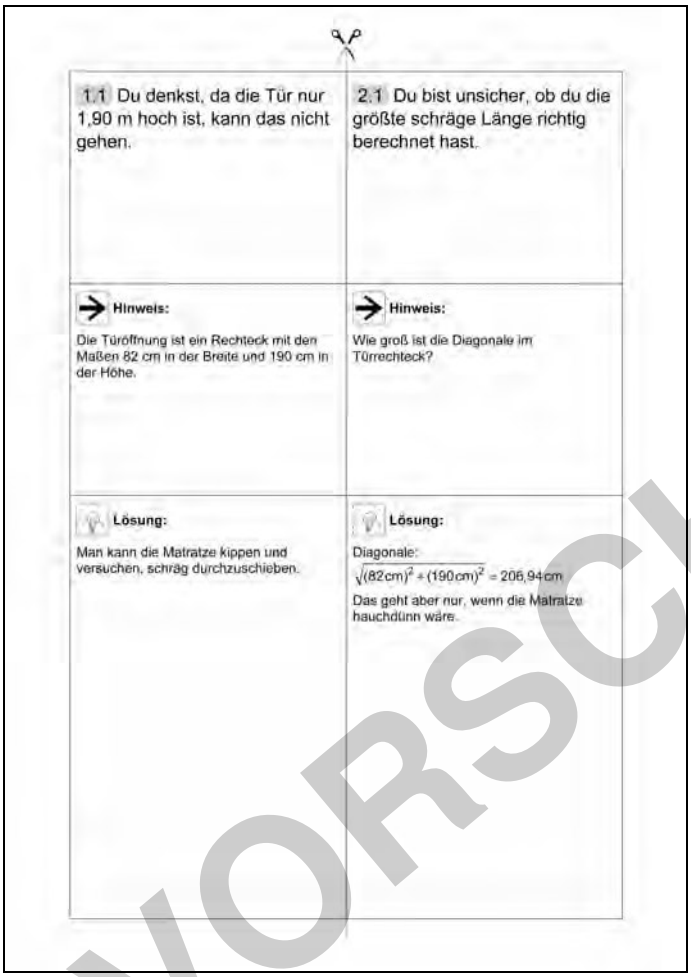
## Vorwort

Auf der beiliegenden **CD-ROM** finden Sie für jede Aufgabe

- die **Aufgabenstellung in editierbarer Form**, falls Sie noch individuelle Anpassungen vornehmen möchten;
- alle Hilfen, Hinweise und Lösungen im praktischen **Hilfekärtchen-Layout**. Einfach ausdrucken, ausschneiden und wie unten gezeigt falten;
- Lösungsbilder, die aus Platzgründen nicht in die Hilfestellung integrierbar sind.



1.1 Du denkst, da die Tür nur 1,90 m hoch ist, kann das nicht gehen.

**Hinweis:**
Die Türöffnung ist ein Rechteck mit den Maßen 82 cm in der Breite und 190 cm in der Höhe.

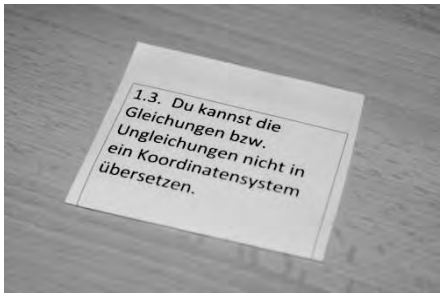
**Lösung:**
Man kann die Matratze kippen und versuchen, schräg durchzuschieben.

2.1 Du bist unsicher, ob du die größte schräge Länge richtig berechnet hast.

**Hinweis:**
Wie groß ist die Diagonale im Türrechteck?

**Lösung:**
Diagonale:
$\sqrt{(82\,cm)^2 + (190\,cm)^2} = 206{,}94\,cm$
Das geht aber nur, wenn die Matratze hauchdünn wäre.

*Hilfekärtchen-Layout*




*Gefaltete Hilfekarte*



Mit dieser Sammlung von komplexen Sachaufgaben, die sich durch die Stoffgebiete der Klassen 9 und 10 ziehen, haben Sie als Lehrkraft ein breites Spektrum an möglicher Unterstützung für individuelle Probleme an der Hand, die Sie zum differenzierten und eigenverantwortlichem Lernen einsetzen können.

Die Lehrkraft, die auf diese Weise unterrichtet, bekommt viel Freiraum während der Übungsphase, in der sie sich in besonderer Weise um einzelne Jugendliche kümmern kann, ohne den Rest der Klasse zu vernachlässigen.

*Dietrich Hinkeldey*

## Übersicht über die Hürden, Hinweise und Lösungen

**1.1** Du denkst, da die Tür nur 1,90 m hoch ist, kann das nicht gehen.

Hinweis: Die Türöffnung ist ein Rechteck mit den Maßen 82 cm mal 190 cm.

Lösung: Man kann die Matratze kippen und versuchen, sie schräg durchzuschieben.

**2.1** Du bist unsicher, ob du die größte schräge Länge richtig berechnet hast.

Hinweis: Wie groß ist die Diagonale des Türrechtecks?

Lösung: Diagonale: $\sqrt{(82\,\text{cm})^2 + (190\,\text{cm})^2} = 206{,}94\,\text{cm}$
Das geht aber nur, wenn die Matratze hauchdünn wäre.

**3.1** Du überlegst dir, ob es sich um eine Antiproportion handelt.

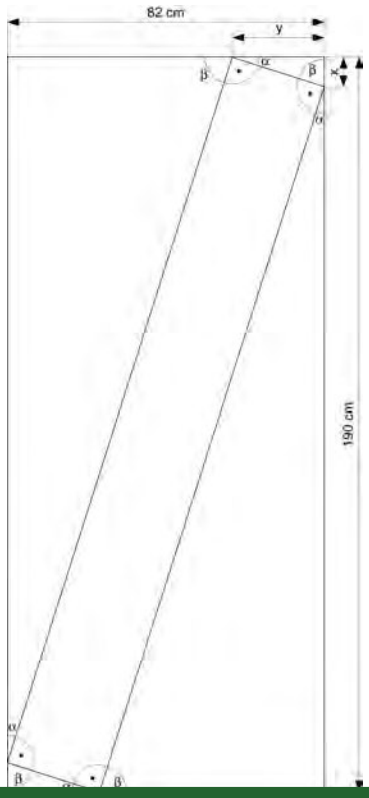
Hinweis: Gilt der Zusammenhang: Bei doppelter Dicke darf die Matratze nur noch halb so lang sein?

Lösung: Nein, es liegt keine Antiproportion vor. Es gilt nur der Zusammenhang: je dicker, desto kürzer muss die Matratze sein (sofern sie über 190 cm lang, also länger als die Türhöhe, ist).

**4.1** Du weißt nicht, wie du einen Zusammenhang zwischen x und y herstellen sollst.

Hinweis: Betrachte die Skizze auf dem Aufgabenblatt: Wenn die Matratze schräg im Türrahmen steht, gibt es 2 große und 2 kleine Dreiecke. Die großen und die kleinen Dreiecke müssen dann ähnlich sein, d.h. dieselben Winkelgrößen haben. Trage die Winkel (α, β) in die Skizze ein.

Lösung: Die Winkel α und β ergeben zusammen 90°. Das Viereck im Inneren der Tür ist dann ein Rechteck.



**4.2** Du weißt zwar, dass die großen und kleinen Dreiecke ähnlich sein müssen, da die Winkel gleich groß sind, kannst aber keine Beziehung zwischen den großen und den kleinen Dreiecken aufschreiben.

Hinweis: In ähnlichen Dreiecken stehen die entsprechenden Seitenlängen im gleichen Verhältnis. x : y entspricht also im großen Dreieck …

Lösung: $x : y = (82 - y) : (190 - x)$

**4.3** Du kannst die Verhältnisgleichung nicht nach y auflösen.

Hinweis: Schreibe die Verhältnisgleichung als Bruchgleichung und multipliziere mit beiden Nennern.

Lösung:

$$\frac{x}{y} = \frac{82 - y}{190 - x}$$

$$190x - x^2 = 82y - y^2$$

$$y^2 - 82y + 190x - x^2 = 0$$

$$y_{1/2} = 41 \pm \sqrt{41^2 - 190x + x^2}$$

**4.4** Du kannst die Dicke d und die Länge l der Matratze nicht durch die Größe x ausdrücken.

Hinweis: y hast du schon mit x ausgedrückt. Die Dicke und die Länge sind die Hypotenusen der kleinen und großen Dreiecke.

Lösung:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$l = \sqrt{(82 - y)^2 + (190 - x)^2}$$

$$y_{1/2} = 41 \pm \sqrt{41^2 - 190x + x^2}$$

**5.1** Du bist dir unsicher, wie du die Formeln für y, d und l eingeben sollst.

Hinweis: Wenn du in der ersten Spalte die Werte für x in 0,1-Schritten anlegst, solltest du für y, d und l jeweils die nächste Spalte benutzen.

Lösung:

B2 | fx | =41-(1681-190*A2+A2^2)^0,5

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x [cm] | y [cm] | d [cm] | l [cm] |
| 2 | 0,1 | 0,23 | 0,25 | 206,76 |
| 3 | 0,2 | 0,47 | 0,51 | 206,57 |
| 4 | 0,3 | 0,70 | 0,76 | 206,39 |
| 5 | 0,4 | 0,94 | 1,02 | 206,20 |

C2 | fx | =(A2^2+B2^2)^0,5

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x [cm] | y [cm] | d [cm] | l [cm] |
| 2 | 0,1 | 0,23 | 0,25 | 206,76 |
| 3 | 0,2 | 0,47 | 0,51 | 206,57 |
| 4 | 0,3 | 0,70 | 0,76 | 206,39 |
| 5 | 0,4 | 0,94 | 1,02 | 206,20 |

D2 | fx | =((82-B2)^2+(190-A2)^2)^0,5

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x [cm] | y [cm] | d [cm] | l [cm] |
| 2 | 0,1 | 0,23 | 0,25 | 206,76 |
| 3 | 0,2 | 0,47 | 0,51 | 206,57 |
| 4 | 0,3 | 0,70 | 0,76 | 206,39 |
| 5 | 0,4 | 0,94 | 1,02 | 206,20 |

**5.2** Du hast Probleme, die Formeln auf die anderen x-Werte zu übertragen.

Hinweis: Kopiere die zweite Zeile, also die Felder B2, C2 und D2, auf die darunterliegenden Zeilen.

Lösung:

M129 | fx

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x [cm] | y [cm] | d [cm] | l [cm] |
| 2 | 0,1 | 0,23 | 0,25 | 206,76 |
| 3 | 0,2 | 0,47 | 0,51 | 206,57 |
| 4 | 0,3 | 0,70 | 0,76 | 206,39 |
| 5 | 0,4 | 0,94 | 1,02 | 206,20 |
| 6 | 0,5 | 1,17 | 1,27 | 206,02 |
| 7 | 0,6 | 1,41 | 1,53 | 205,83 |
| 8 | 0,7 | 1,65 | 1,79 | 205,65 |
| 9 | 0,8 | 1,89 | 2,05 | 205,46 |
| 10 | 0,9 | 2,13 | 2,31 | 205,28 |
| 11 | 1 | 2,37 | 2,58 | 205,09 |
| 12 | 1,1 | 2,62 | 2,84 | 204,90 |
| 13 | 1,2 | 2,86 | 3,10 | 204,71 |
| 14 | 1,3 | 3,11 | 3,37 | 204,53 |
| 15 | 1,4 | 3,36 | 3,64 | 204,34 |
| 16 | 1,5 | 3,61 | 3,91 | 204,15 |
| 17 | 1,6 | 3,86 | 4,18 | 203,96 |
| 18 | 1,7 | 4,11 | 4,45 | 203,77 |
| 19 | 1,8 | 4,36 | 4,72 | 203,58 |
| 20 | 1,9 | 4,62 | 4,99 | 203,39 |
| 21 | 2 | 4,88 | 5,27 | 203,20 |
| 22 | 2,1 | 5,13 | 5,55 | 203,01 |
| 23 | 2,2 | 5,39 | 5,82 | 202,82 |
| 24 | 2,3 | 5,65 | 6,10 | 202,63 |
| 25 | 2,4 | 5,92 | 6,39 | 202,44 |
| 26 | 2,5 | 6,18 | 6,67 | 202,25 |
| 27 | 2,6 | 6,45 | 6,95 | 202,06 |
| 28 | 2,7 | 6,72 | 7,24 | 201,86 |
| 29 | 2,8 | 6,99 | 7,53 | 201,67 |
| 30 | 2,9 | 7,26 | 7,82 | 201,48 |
| 31 | 3 | 7,53 | 8,11 | 201,28 |
| 32 | 3,1 | 7,81 | 8,40 | 201,09 |
| 33 | 3,2 | 8,09 | 8,70 | 200,89 |



**5.3** In der Tabelle findest du keine maximale Dicke der Matratze.

Hinweis: Petras Matratze hat als kürzeste Abmessung 200 cm. Welche Dicke passt dazu?

Lösung:

| Breite in cm | Länge in cm |
|---|---|
| 9,90 | 200,10 |
| 10,20 | 199,91 |

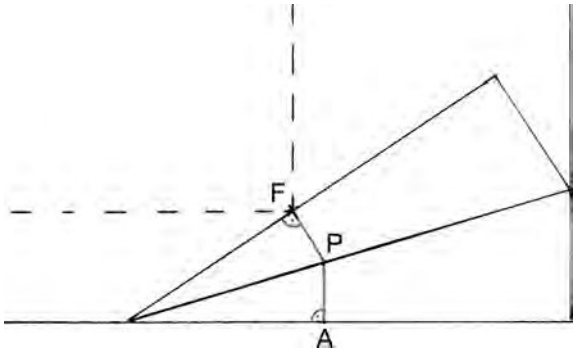
Bei einer Abmessung von 200 cm kann die Matratze 10 cm dick sein, damit sie noch ohne Knicken durch die Tür geht.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 34 | 3,3 | 8,37 | 8,59 | 200,70 |
| 35 | 3,4 | 8,65 | 9,29 | 200,50 |
| 36 | 3,5 | 8,93 | 9,59 | 200,30 |
| 37 | 3,6 | 9,22 | 9,90 | 200,10 |
| 38 | 3,7 | 9,51 | 10,20 | 199,91 |
| 39 | 3,8 | 9,80 | 10,51 | 199,71 |
| 40 | 3,9 | 10,09 | 10,82 | 199,51 |
| 41 | 4 | 10,39 | 11,13 | 199,31 |
| 42 | 4,1 | 10,69 | 11,45 | 199,11 |
| 43 | 4,2 | 10,99 | 11,76 | 198,91 |

**6.1** Du weißt, dass ein Punkt auf der Faltlinie zur Parabel gehört, weißt aber nicht welcher.

Hinweis: Die Blattkante ist die Leitlinie. Von der Kante senkrecht zur Faltlinie muss es genau so weit sein wie zum Brennpunkt. Falten ist eine Art Spiegeln.

Lösung:

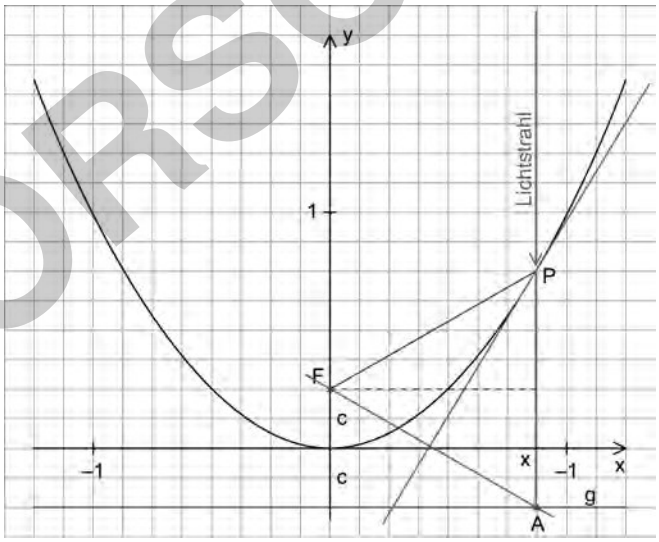



Die Strecke von A nach P ist spiegelbildlich zur Strecke von F nach P und somit gleich lang. Damit ist P ein Punkt der Parabel.

**7.1** Du kennst das Spiegelgesetz (Einfallwinkel = Ausfallwinkel) von flachen Spiegeln, hier ist aber ein gekrümmter Spiegel.

Hinweis: Betrachte noch einmal die Skizze von 4.2 und trage dir die Verlängerung der Strecke von A nach P als zur y-Achse parallelen Lichtstrahl ein sowie die dazugehörige Faltlinie.

Lösung:




**7.2** Trotz einer passenden Skizze findest du keine Begründung für den Strahlenverlauf.

Hinweis: Die Faltlinie ist eine Spiegelachse. Welche Winkel sind gleich?

Lösung: Der Winkel zwischen dem Lichtstrahl und der Faltlinie hat die gleiche Größe wie der Winkel zwischen der Faltlinie und der Strecke von P nach F.

Funktionsanpassung, lineare und quadratische Funktionen, Durchschnittsgeschwindigkeit

PC, Excel

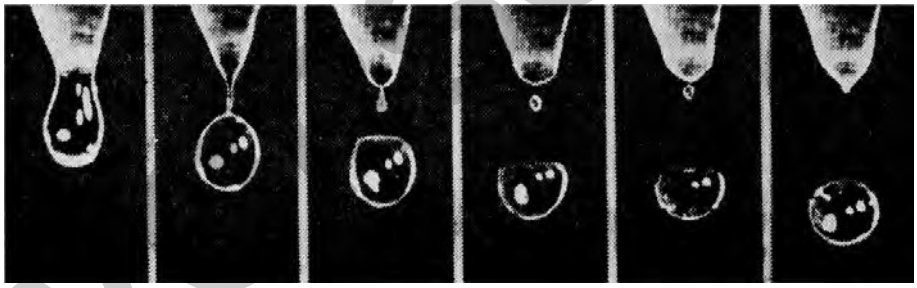
| Zeit t [s] | Weg s [m] |
|---|---|
| 0,0000 | 0,00 |
| 0,1427 | 0,10 |
| 0,2021 | 0,20 |
| 0,2473 | 0,30 |
| 0,2854 | 0,40 |
| 0,3194 | 0,50 |
| 0,3495 | 0,60 |
| 0,3780 | 0,70 |
| 0,4038 | 0,80 |
| 0,4286 | 0,90 |
| 0,4512 | 1,00 |
| 0,5046 | 1,25 |
| 0,5530 | 1,50 |
| 0,5971 | 1,75 |
| 0,6388 | 2,00 |
| 0,6771 | 2,25 |

Um die Bewegung von Wassertropfen zu analysieren, wurden folgende Messungen durchgeführt: Mit einem elektronischen Zeitmesser wurde die Fallzeit von Wassertropfen mit 4 mm Durchmesser für vorher festgelegte Fallstrecken auf vier Nachkommastellen genau bestimmt.

1) Übertrage die Werte in ein geeignetes Weg-Zeit-Koordinatensystem. Welchen Funktionszusammenhang von Weg (y-Achse) und Zeit (x-Achse) vermutest du, wenn du den Graphen betrachtest?

2) Bestimme zu jedem Messwertepaar den Faktor der Parabelöffnung, möglichst mit Excel.

3) Messwerte sind nie ganz exakt; deshalb liegen die Messwerte nicht hundertprozentig auf einer mathematischen Funktionskurve. Wie lautet die Funktion, die sich den Messwerten ziemlich gut anpasst? Welche Fallstrecken errechnen sich für 5 Sekunden, für 10 Sekunden?



Nun kannst du zwar zu jeder Fallzeit die dazugehörige Fallstrecke berechnen, kennst aber noch nicht die Geschwindigkeit ($\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$). Um die Geschwindigkeit z.B. bei 0,5 s Fallzeit zu bestimmen, berechnen wir die Position kurz davor und kurz danach und teilen den Wegunterschied durch den Zeitunterschied. Dies entspricht angenähert der Geschwindigkeit bei 0,5 s.

4) Berechne nun für 0,5 s; 1,0 s; 1,5 s; 2,0 s die Geschwindigkeit eines Wassertropfens. Welchen Funktionszusammenhang erkennst du zwischen Fallzeit und Geschwindigkeit?

5) Wie schnell wäre demnach ein Regentropfen, der aus einer 100 m hohen Wolke fällt? Wie schnell ist einer, der aus einer 1000 m hohen Wolke fällt?

6) Erläutere deine Ergebnisse aus Aufgabe 5) und vergleiche dies mit deiner Erfahrung von Regenschauern.

(Fortsetzung im Teil 2, S. 25)

## Übersicht über die möglichen Hürden

**Hilfen zu 1)**

1.1 Du weißt nicht, wie du ein „geeignetes“ Koordinatensystem wählen sollst.

1.2 Du hast alle Punkte eingetragen, weißt aber nicht, wie die Funktion lauten könnte.

1.3 Du möchtest die Aufgabe mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (z. B. Excel) lösen und hast Probleme mit der Diagrammerstellung.

**Hilfen zu 2)**

2.1 Du weißt nicht, wie du die Parabelöffnung berechnen sollst.

2.2 Du möchtest die Tabellenkalkulation zur Berechnung von a benutzen, kannst aber die Rechenvorschrift nicht eingeben.

**Hilfen zu 3)**

3.1 Du bist dir unsicher, welchen Wert du für a wählen sollst.

3.2 Du weißt nicht, wie du weitere Messwerte berechnen sollst.

3.3 Deine Werte sind sehr hoch und du bist dir unsicher, ob die Fallstrecken für 5 Sekunden und 10 Sekunden richtig berechnet sind.

**Hilfen zu 4)**

4.1 Du kommst mit den Weg- und Zeitunterschieden durcheinander.

4.2 Du möchtest die Berechnungen mit der Tabellenkalkulation durchführen, kommst aber bei den vielen Berechnungen durcheinander.

4.3 Du erkennst keinen Zusammenhang von Geschwindigkeit und Zeit.

**Hilfen zu 5)**

5.1 Du kannst die Fallzeiten zu 100 m und 1 000 m nicht berechnen.

5.2 Du bist dir unsicher, ob deine berechneten Geschwindigkeiten wirklich so hoch sind.

**Hilfe zu 6)**

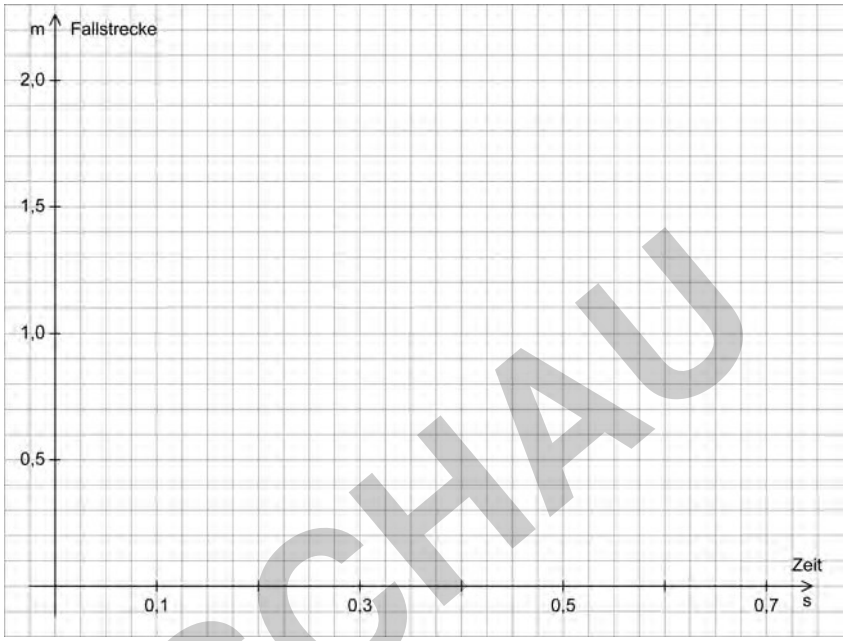
6.1 Du kannst dir unter den Geschwindigkeiten nicht viel vorstellen.

## Übersicht über die Hürden, Hinweise und Lösungen

**1.1** Du weißt nicht, wie du ein „geeignetes“ Koordinatensystem wählen sollst.

Hinweis: Auf der x-Achse für die Zeit musst du auch noch den größten Wert mit 0,6771 s eintragen können, auf der y-Achse für den Weg den größten Wert von 2,25 m.

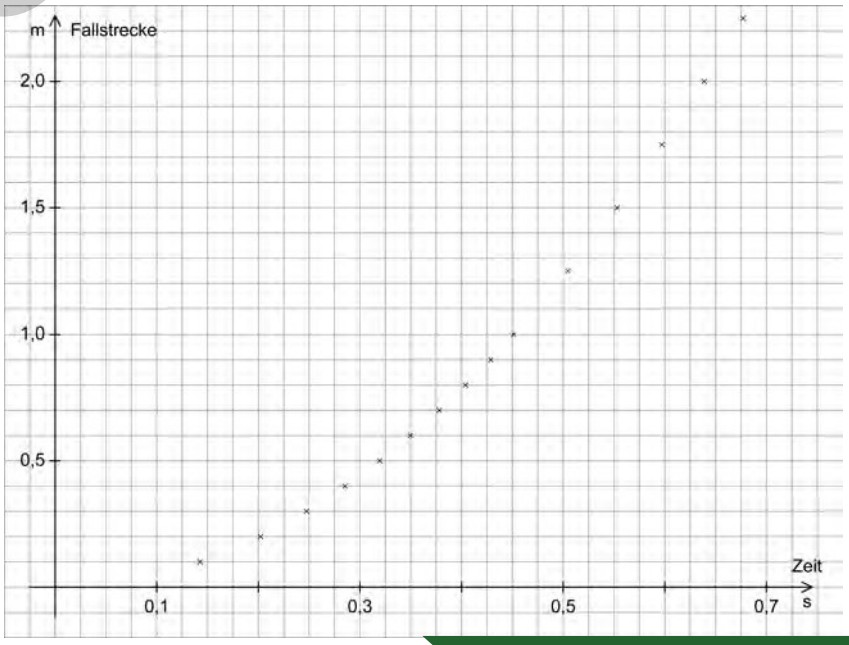
Lösung:




**1.2** Du hast alle Punkte eingetragen, weißt aber nicht, wie die Funktion lauten könnte.

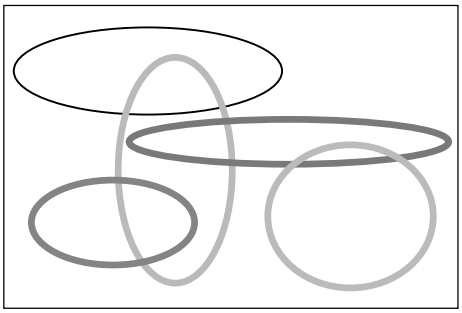
Hinweis: Der Verlauf der Punkte erinnert dich vielleicht an den rechten Ast einer Parabel oder einer höheren Potenzfunktion.

Lösung: Möglichkeiten:
$s = at^2$ oder $s = at^3$ oder $s = at^4$ …



Satz des Pythagoras, Potenzgleichungen, geometrische Grundkonstruktionen

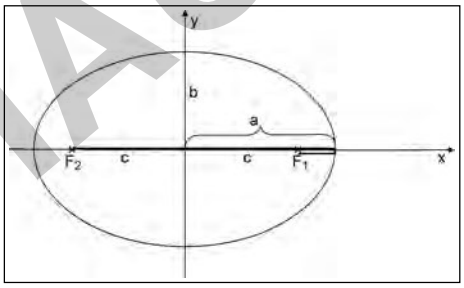
Schnur, ggf. Lineal und rechtwinkliges Dreieck, Reißnägel, weißes, etwas festeres Papier zum Falten, Zirkel, Schere



Du kennst sicher Ellipsen. Man kann sie als Funktionsgleichung in der Form $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ schreiben, wobei a und b die große bzw. die kleine Halbachse bezeichnen.

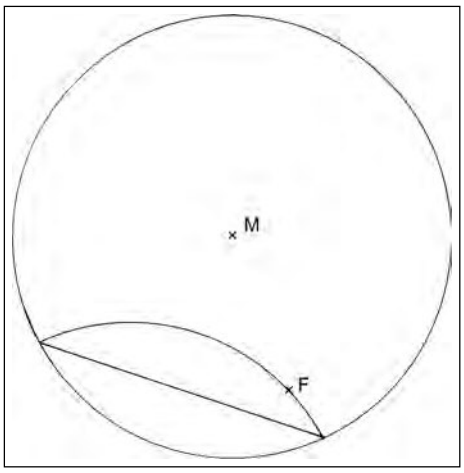
Eine Ellipse ist aber auch auf eine andere Art definiert: Sie ist die Menge aller Punkte, die von zwei festen Brennpunkten $F_1$ und $F_2$ gleich weit entfernt sind. Die Summe dieser beiden Entfernungen bezeichnet man mit s.

1) Zeichne zunächst zwei beliebige Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ auf ein Papier und stecke zwei Reißnägel in die Punkte. Knote nun eine dünne Schnur zu einem Ring, sodass du ihn um die beiden Brennpunkte legen kannst. Fahre dann mit der Bleistiftspitze bei gespannter Schnur um die Brennpunkte herum. Begründe, warum die Punkte auf dieser Linie die Bedingung für eine Ellipse erfüllen.




2) Im Koordinatensystem liegen die beiden Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ im Abstand von c vom Ursprung auf der x-Achse. Wie errechnen sich die Größen der Halbachsen a und b aus den Größen c und s?

3) Zeichne nun einen möglichst großen Kreis auf ein Blatt Papier, markiere den Mittelpunkt und schneide den Kreis aus. Markiere einen weiteren Punkt F, der etwa 3 cm von der Kreislinie entfernt liegt. Falte nun den Kreisrand auf den Punkt F und falte wieder auf. Wiederhole diese Art der Faltung mit vielen verschiedenen Stellen des Kreisrandes. Welche Faltfigur entsteht?




4) Begründe, warum die entstandene Faltfigur eine Ellipse mit den Brennpunkten M und F sein muss.

## Übersicht über die möglichen Hürden

**Hilfen zu 1)**

1.1 Du kommst mit den Nadeln und der Schnur nicht zurecht.

1.2 Du weißt nicht, warum die Punkte die Ellipsenbedingung erfüllen.

**Hilfen zu 2)**

2.1 Du kannst keine Beziehung zwischen den Halbachsen a und b und den Größen c und s entdecken.

2.2 Du findest keinen Zusammenhang zur Brennweite c.

**Hilfe zu 3)**

3.1 Du kommst mit den vielen Faltungen nicht zurecht.

**Hilfen zu 4)**

4.1 Die Faltlinien sind alles Tangenten an die Ellipse, aber welcher Punkt der Faltlinie ist Ellipsenpunkt?

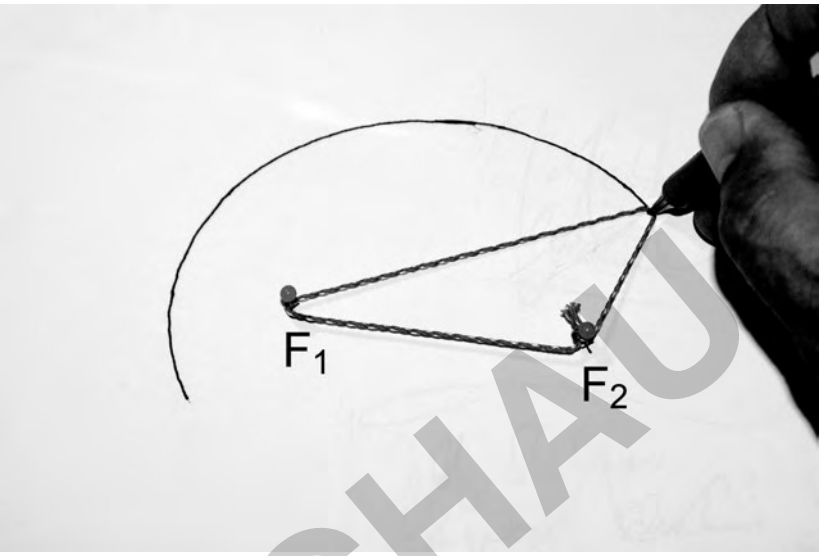
4.2 Du kannst nicht begründen, warum M und F die Brennpunkte sind.

## Übersicht über die Hürden, Hinweise und Lösungen

**1.1** Du kommst mit den Reißnägeln und der Schnur nicht zurecht.

Hinweis: Arbeite mit einem Partner zusammen. Wenn einer die beiden Reißnägel zusätzlich festhält und der andere den Bleistift an der Schnur entlang bewegt, geht es einfacher.

Lösung:




**1.2** Du weißt nicht, warum die Punkte die Ellipsenbedingung erfüllen.

Hinweis: Wähle einen Punkt auf deiner Ellipse. Zeichne ein, wie die Schnur von dem Punkt zu den beiden Brennpunkten verläuft.

Lösung: Die Schnur hat für <u>jeden</u> Ellipsenpunkt eine feste, unveränderliche Länge. Wenn sie gespannt durch die beiden Brennpunkte und einen beliebigen Ellipsenpunkt geht, dann ist die Summe der Entfernungen zu den beiden Brennpunkten immer gleich: $l_1 + l_2 = s$.