II.2 Ist die größte Zählerpotenz = größte Nennerpotenz, ist eine horizontale Gerade, parallel zur x-Achse, waagrechte Asymptote.

Beispiel 1: $f(x)=\frac{4x^2-5}{2x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5}{2x^2-1}$ mit höchster Potenz wieder kürzen:

$\to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} \to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}}$ für x ∞ einsetzen: $\to \frac{4-0}{2-0} \to 2$ also **y=2**.

Beispiel 2: $f(x)=4+e^{\left(-\frac{1}{3}x\right)}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(4+e^{\left(-\frac{1}{3}x\right)}\right)$

lässt man jetzt x $\to\infty$ streben, ergibt sich $e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}\to 0$, damit ergibt sich **y=4** als waagrechte Asymptote.

II.3 Ist die größte Zählerpotenz > größte Nennerpotenz, erhält man eine schiefe Asymptote, bzw. eine asymptotische Näherungsfunktion durch **Polynomdivision**.

(zur Rechentechnik der Polynomdivision siehe auch Besserwisser-Kasten im Themengebiet der Aufgabe 3 Gleichungen)

Beispiel für „schiefe Asymptote":

$f(x)=\frac{3x^2-2}{x+3}$ Polynomdivision: $(3x^2-2):(x+3)=3x-9+$ Rest: $\frac{25}{x+3}$

Die limes-Untersuchung erfolgt mit dem polynomdividierten Term:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-9+\frac{25}{x+3}\right)$ der Rest $\frac{25}{x+3}$ geht __**immer**__ $\to 0$ für x $\to\infty$.

Deshalb bleibt als schiefe Asymptote $y=3x-9$ stehen.

Beispiel für „asymptotische Näherungsfunktion":

$f(x)=\frac{3x^3-2}{x+3}$ Polynomdivision: $(3x^3-2):(x+3)=3x^2-9x+27+$ Rest: $\frac{83}{x+3}$

Die limes-Untersuchung erfolgt mit dem polynomdividierten Term:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2-9x+27+\frac{83}{x+3}\right)$ der Rest $\frac{83}{x+3}$ geht __**immer**__ $\to 0$ für x $\to\infty$.

Deshalb bleibt als asymptotische Näherungsfunktion eine Parabel: $y=3x^2-9x+27$ stehen.

Schlußfolgerung: Größte Zählerpotenz - größte Nennerpotenz bestimmt, ob wir hier eine Gerade (schiefe Asymptote) oder parabelförmige Schaubilder (asymptotische Näherungsfunktionen) erhalten.

7.) Symmetrie

Ihr habt 2 verschiedene Symmetrien in der Schule kennengelernt:

- Achsensymmetrie zur y-Achse und
- Punktsymmetrie zum Ursprung

Generell gibt es auch die Achsensymmetrie zu beliebigen Achsen parallel zur y-Achse und die Punktsymmetrie zu beliebigen Punkten. Diese Überlegungen sind aber nicht abirelevant.

7.1 Achsensymmetrische Funktionen zur y-Achse („**gerade**" Funktionen)

Bedingung: $f(x) = f(-x)$

Beispiel: $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1$

Wie man leicht sieht, wird $f(-x) = f(x)$, da die geraden Potenzen das Minus-Vorzeichen neutralisieren $\rightarrow$ die Funktion ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

7.2 Punktsymmetrische Funktionen zum Ursprung („**ungerade**" Funktionen)

Bedingung: $f(x) = -f(-x)$

Beispiel: $f(x) = -x^3 + 6x$ für x wird $(-x)$ eingesetzt:

$$f(-x) = -(-x)^3 + 6(-x) \rightarrow f(-x) = x^3 - 6x \rightarrow -f(-x) = -(x^3 - 6x) = -x^3 + 6x$$

Also ist $f(x) = -f(-x)$ und damit ist die Funktion punktsymmetrisch.

7.3 Beurteilung zusammengesetzter Funktionen

$f(x) = h(x) \cdot g(x)$	f ist gerade, wenn h und g gerade oder beide ungerade sind und ist ungerade, wenn eine von beiden (h oder g) gerade und die andere ungerade ist.
$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$	f ist gerade, wenn beide (h und g) gerade oder beide ungerade sind und ist ungerade, wenn eine gerade und die andere ungerade ist.
$f(x) = h(x) \pm g(x)$	f ist gerade, wenn beide (h und g) gerade sind und ist ungerade, wenn beide ungerade sind.

4.2 Tangente bzw. Normale in einem Kurvenpunkt B

Das Aufstellen einer Tangente oder Normale in einem Kurvenpunkt B zählt wohl zu den absoluten Grundlagen in der Oberstufe.

Allgemeine Form der Tangentengleichung t im Berührpunkt $B(x_B / f(x_B))$:

$$t: y = f'(x_B)\cdot(x - x_B) + f(x_B)$$

Allgemeine Form der Normalengleichung n im Berührpunkt $B(x_B / f(x_B))$:

$$n: y = -\frac{1}{f'(x_B)}\cdot(x - x_B) + f(x_B)$$

Alternativ kann man natürlich auch mit der allgemeinen Geradengleichung $y = m\cdot x + c$ rechnen:

Dabei ist $m_t = f'(x_B)$ für Tangenten und

$m_n = -\frac{1}{f'(x_B)}$ für Normalen.

c wird mit Hilfe des Kurvenpunktes $B(x_B / f(x_B))$ ermittelt, indem man diesen in die Geradengleichung $y = m\cdot x + c$ einsetzt und nach c auflöst.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4}$.

Bestimmen Sie Gleichung der Tangente (Normale) im Kurvenpunkt $B(2 / f(x_B))$.

Lösungsweg:

1. Zuerst wird $f(x_B)$ errechnet: $f(2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad \rightarrow B(2/1)$

2. Jetzt wird die Steigung der Tangente $f'(x_B)$ bestimmt:

$$f'(x) = -2\cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \qquad \rightarrow f'(2) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

3. **Tangentengleichung im Kurvenpunkt B(2/1)**

   Die Zahlen für $f'(2)$ und $B(2/1)$ werden jetzt in die Tangentengleichung von oben eingesetzt:

   $t: y = -\frac{1}{4}\cdot(x-2)+1$ ausmultipliziert: $t: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

   Normalengleichung im Kurvenpunkt B(2/1)

   Die Zahlen für $f'(2)$ und $B(2/1)$ werden jetzt in die Normalengleichung von oben eingesetzt:

   $n: y = -\frac{1}{-\frac{1}{4}}\cdot(x-2)+1$ ausmultipliziert: $n: y = 4x - 7$

4.3 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Dieses Kapitel der Schulmathematik liegt zeitlich für die meisten Abiturienten schon etwas länger zurück, da es der Lehrplan für die 10./11.Klasse vorsieht.

Ein Beispiel gibt Klarheit, um was es sich dabei handelt:

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3.Grades, deren Graph durch den Punkt P(1/8) geht und eine Wendetangente mit Steigung 6 im Wendepunkt W(0/0) besitzt.

Lösungsweg:

Ansatz für ganzrationale Funktion 3.Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

(es ist sinnvoll sofort die 1. und 2. Ableitung zu bilden, da diese fast immer gebraucht werden und die Bildung wenig Zeit in Anspruch nimmt).

Man muss also 4 Gleichungen aus den Angaben des Textes filtern, da wir 4 Unbekannte (a,b,c,d) suchen.

Bedingungen aus dem Text in Gleichungs-Kurzform:

1. Punkt P(1/8):	$f(1) = 8$ eingesetzt:	$8 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$
2.+3. Wendepunkt W(0/0):	$f(0) = 0$ eingesetzt:	$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$
	$f''(0) = 0$ eingesetzt:	$0 = 6a \cdot 0 + 2b$
4. Wendetangente:	$f'(0) = 6$ eingesetzt:	$6 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c$

Zuerst schaut man sich **immer** die Gleichungen mit der „0" an. Also Gleichung 2 und 3:

Gleichung 2: 0=d
Gleichung 3: 0=b

Danach die Gleichungen, die zumindest noch eine „0" besitzen: Also Gleichung 4:

Gleichung 4: 6=c

Zuletzt werden die ermittelten Werte in die verbliebene Gleichung eingesetzt:

Gleichung 1: 8=a+b+c+d
mit d=b=0 und c=6: 8=a+6 → a=2.

Damit erhalten wir also die Funktion: $f(x) = 2x^3 + 6x$.