Dabei ist Φ die Gaußsche Integralfunktion, die in der Tabelle angegeben sind.
Mit den berechneten Werten folgt:

$$P(560-k \leq X \leq 560+k) \approx 2\cdot\Phi\left(\frac{k+0,5}{\sqrt{520,8}}\right)-1 \approx 0,90 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k+0,5}{\sqrt{520,8}}\right) \approx 0,95$$

Aus der Tabelle kann man entnehmen: $\Phi(1,64)=0,9495$ und $\Phi(1,65)=0,9505$
Da 0,95 zwischen beiden Wahrscheinlichkeiten liegt, berechnet man zunächst k für beide Werte und erhält:

$$\frac{k_1+0,5}{\sqrt{520,8}}=1,64 \Rightarrow k_1=1,64\cdot\sqrt{520,8}-0,5\approx 36,93$$

$$\frac{k_2+0,5}{\sqrt{520,8}}=1,65 \Rightarrow k_2=1,65\cdot\sqrt{520,8}-0,5\approx 37,15$$

Da $k\in\mathbb{N}$ so zu wählen ist, dass möglichst genau 90 % Wahrscheinlichkeit erreicht wird, ist $k=37$ zu wählen.
Das gesuchte Intervall I, in dem die Anzahl fehlerhafter Gläser mit möglichst genau 90 % Wahrscheinlichkeit liegt, ist also $I=[560-37;560+37]=[523;597]$
Alternativ kann man auch die 90 %-Umgebung um $\mu=560$ ermitteln. Wegen

$$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{8000\cdot 0,07\cdot(1-0,07)}=\sqrt{520,8}\approx 22,8>3$$

kann die gesuchte Umgebung mit dem 95 %-Quantil der Standard-Normalverteilung bestimmt werden: Aus der Tabelle entnimmt man $\Phi(1,64)=0,9495$
Damit gilt für das gesuchte Intervall:

$$\begin{aligned}P(560-k\leq X\leq 560+k)&\approx P(560-1,64\cdot\sigma\leq X\leq 560+1,64\cdot\sigma)\\&\approx P(560-1,64\cdot 22,8\leq X\leq 560+1,64\cdot 22,8)\\&\approx P(522,6\leq X\leq 597,4)\end{aligned}$$

Also ist $P(523\leq X\leq 597)\approx 0,9$
Das gesuchte Intervall I, in dem die Anzahl fehlerhafter Gläser mit möglichst genau 90 % Wahrscheinlichkeit liegt, ist also $I=[560-37;560+37]=[523;597]$
Mit Hilfe des CAS berechnet man zur Kontrolle die Wahrscheinlichkeit des Intervalls I mit der Binomialverteilung und erhält:

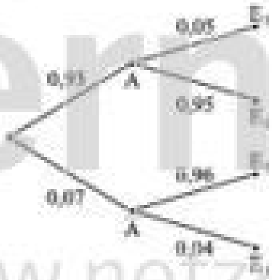
$$P(523\leq X\leq 597)\approx 0,8997\approx 0,9=90\,\%$$

c) I) Mit den Ereignissen A: »das Glas ist einwandfrei« und E_1: »ein Glas wird bei der Endkontrolle aussortiert« sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:
$P(A)=0,93$; $P(\overline{A})=0,07$; $P_{\overline{A}}(E_1)=0,96$ und $P_A(E_1)=0,05$
Dabei ist $P_{\overline{A}}(E_1)$ die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Glas aussortiert ist, wenn bereits bekannt ist, dass es fehlerhaft ist. Entsprechend ist $P_A(E_1)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Glas aussortiert wird, wenn bereits bekannt ist, dass es einwandfrei ist.
Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$ gilt mit dem Satz über totale Wahrschein-

lichkeiten:

$$P(E_1) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(E_1) + P(A) \cdot P_A(E_1)$$
$$= 0{,}07 \cdot 0{,}96 + 0{,}93 \cdot 0{,}05 = 0{,}1137 = 11{,}37\,\%$$

Alternativ kann man mit den obigen Bezeichnungen und den gegebenen Wahrscheinlichkeiten auch ein Baumdiagramm zeichnen:



Mit der 1. und 2. Pfadregel gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$:

$$P(E_1) = 0{,}93 \cdot 0{,}05 + 0{,}07 \cdot 0{,}96 = 0{,}1137 = 11{,}37\,\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Glas bei der Endkontrolle aussortiert wird, beträgt etwa 11,4 %.
Die Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$ des Ereignisses E_2 : «ein bei der Endkontrolle aussortiertes Glas ist wirklich fehlerhaft» entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_{E_1}(\overline{A})$, also der Wahrscheinlichkeit, dass ein Glas nicht einwandfei ist, wenn schon bekannt ist, dass es aussortiert wurde.
Mit dem Satz von Bayes erhält man:

$$P(E_2) = P_{E_1}(\overline{A}) = \frac{P(E_1 \cap \overline{A})}{P(E_1)} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(E_1)}{P(E_1)} = \frac{0{,}07 \cdot 0{,}96}{0{,}1137} \approx 0{,}591 = 59{,}1\,\%$$

Alternativ kann man die Wahrscheinlichkeit $P(E_1 \cap \overline{A})$ auch mit der 1. Pfadregel dem Baumdiagramm entnehmen: $P(E_1 \cap \overline{A}) = 0{,}07 \cdot 0{,}96$
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein aussortiertes Glas wirklich fehlerhaft ist, nur etwa 59,1 %.

II) Um zu beurteilen, wie sich eine Veränderung von $x = P_{\overline{A}}(E_1)$ auf die Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$ auswirkt, bestimmt man $P(E_2)$ in Abhängigkeit von x. Es gilt entsprechend der vorherigen Teilaufgabe:

$$P(E_2) = \frac{P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(E_1)}{P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(E_1) + P(A) \cdot P_A(E_1)} = \frac{0.07 \cdot x}{0.07 \cdot x + 0.93 \cdot 0.05} = \frac{0.07x}{0.07x + 0.0465} = P(x)$$

Mit Hilfe des CAS oder der Quotientenregel bestimmt man die 1. Ableitung der Funktion $P(x)$ mit $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$P'(x) \approx \frac{0.66}{(x+0.66)^2}$$

Da der Zähler und der Nenner von $P'(x)$ stets positiv sind, gilt $P'(x) > 0$.