einsetzt und den zugehörigen Parameter berechnet:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Für $r=-1$ ist die Gleichung erfüllt, also sind die Geraden g und QR identisch.

c) Zur Bestimmung der Bildpunkte P' und S' von P und S unter der Abbildung α berechnet man mit Hilfe des CAS folgende Matrix-Vektor-Produkte:

$$\overrightarrow{OP'}=A\cdot\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow P'(4\,|\,2\,|\,0)=Q$$

$$\overrightarrow{OS'}=A\cdot\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\Rightarrow S'(2\,|\,4\,|\,0)=R$$

Um zu zeigen, dass jeder Punkt der Geraden SR auf den Punkt R abgebildet wird, multipliziert man die Matrix A mit der rechten Seite der Gleichung von

SR: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}$ und erhält mit Hilfe des CAS:

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\Rightarrow R(2\,|\,4\,|\,0)$$

Alternativ kann man auch das Bild des Richtungsvektors der Geraden SR bestimmen:

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Da der Stützpunkt $S(0\,|\,2\,|\,4)$ der Geraden SR auf den Punkt R und der Richtungsvektor der Geraden SR auf den Nullvektor abgebildet wird, wird die Gerade SR auf den Punkt R abgebildet.

Um zu zeigen, dass jeder Punkt der Ebene E auf einen Punkt der Geraden

QR: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}$ abgebildet wird, multipliziert man die Matrix A mit der rechten Seite der Ebenengleichung von E und erhält mit Hilfe des CAS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung der Abbildung α auf die Ebene E ergibt eine Geradengleichung der Geraden QR, da die Stützvektoren beider Geraden identisch und die Richtungsvektoren ein Vielfaches voneinander sind.

Alternativ kann man sich folgendes überlegen:

Ein Stützvektor der Ebene E ist der Ortsvektor von S. Dieser wird durch α auf den Ortsvektor von R abgebildet, der ein Stützvektor der Geraden QR ist.

Ein Spannvektor der Ebene E ist $\overrightarrow{SR}$. Dieser wird durch α auf den Nullvektor abgebildet.

Ein zweiter Spannvektor ist $\overrightarrow{PS}$. Da P durch α auf Q und S auf R abgebildet werden, wird $\overrightarrow{PS}$ auf $\overrightarrow{QR}$ abgebildet. Dieser ist ein Richtungsvektor der Geraden QR.

Also werden alle Punkte der Ebene E auf Punkte der Geraden QR abgebildet.

d) Bildet man $\overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ unter der Abbildung β ab, multipliziert man die Matrix B mit $\overrightarrow{SR}$ und erhält:

$$\overrightarrow{S'R'} = B \cdot \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für die Länge der Bildstrecke $\overline{S'R'}$:

$$\overline{S'R'} = |\overrightarrow{S'R'}| = \left| \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{24}$$

Wegen $\overline{S'R'} = \sqrt{24} = \overline{SR}$ (siehe Aufgabenteil a)) sind Urbild- und Bildstrecke gleich lang.

Um zu zeigen, dass Urbild- und Bildstrecke von beliebigen Vektoren $\vec{v}$ der Ebene E gleich lang sind, bestimmt man zuerst den Betrag von $\vec{v}$.

Jeder Vektor $\vec{v}$ der Ebene E läßt sich als Linearkombination der Spannvektoren von E darstellen:

$$\vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r+s \\ r+s \\ -2s \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

Den Betrag von $\vec{v}$ berechnet man - unter Anwendung der binomischen Formeln oder mit Hilfe des CAS - wie folgt: