b) Zum Beweis der Gleichseitigkeit des Dreiecks PMQ ist zu zeigen, dass alle drei Seiten gleich lang sind:

$$|\overrightarrow{PM}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+2^2+0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+0^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{MQ}| = \left|\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Wegen $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{MQ}|$ ist das Dreieck PMQ gleichseitig.
Zur Berechnung des Flächeninhalts A_1 des Dreiecks PMQ benötigt man die Grundseite a mit der Länge $2\sqrt{2}$ und seine Höhe h, die man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erhält:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{6}$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt A_1 des Dreiecks PMQ:

$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ FE}$$

Für den Umfang U des Sechsecks UTSRQP gilt: $U = 6\cdot a = 6\cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \approx 16,97$ LE.
Für den Flächeninhalt A_2 des Sechsecks UTSRQP gilt:

$$A_2 = 6\cdot A_1 = 6\cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20,79 \text{ FE}$$

c) Das Volumen der Pyramide erhält man mit der Formel: $V_P = \frac{1}{3}\cdot G_P\cdot h_P$.
Die Grundfläche der Pyramide ist das Sechseck UTSRQP, dessen Flächeninhalt $G_P = A_2 = 12\sqrt{3}$ FE beträgt.
Die Höhe h_P der Pyramide ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MG}$, weil die Gerade durch M und G senkrecht auf der Ebene E, in der das Sechseck UTSRQP liegt, steht (siehe Aufgabe a)).

$$h = |\overrightarrow{MG}| = \left|\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ LE}$$

Damit erhält man das Volumen V_P der Pyramide:

$$V_P = \frac{1}{3}\cdot G_P\cdot h_P = \frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 24 \text{ VE}$$

Das Volumen V_W des Würfels ist: $V_W = 4^3 = 64$ VE.
Die gesuchte Prozentzahl p berechnet man folgendermaßen:

$$p = \frac{V_P}{V_W}\cdot 100\,\% = \frac{24}{64}\cdot 100\,\% = 37,5\,\%$$

d) Um zu zeigen, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$ in der Ebene E liegt,

schreibt man die Gleichung von g als „allgemeinen Punkt“ $P_s(3-s \mid 3-s \mid 2s)$, setzt ihn in die Koordinatenform von E ein und erhält:

$$(3-s)+(3-s)+2s-6=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Aufgrund der wahren Aussage liegt g in E.
Der Stützpunkt $A(3 \mid 3 \mid 0)$ der Geraden g ist wegen $A(3 \mid 3 \mid 0) = \left(\frac{4+2}{2} \mid \frac{2+4}{2} \mid \frac{0+0}{2}\right)$ der Mittelpunkt der Strecke UT.

Der Richtungsvektor $\vec{r_g} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von g ist senkrecht zum Vektor $\overrightarrow{UT}$, weil

$$\vec{r_g} \cdot \overrightarrow{UT} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot 2+2\cdot 0 = 0$$

ist.
Da die Gerade g in der Ebene E, die auch das Sechseck UTSRQP enthält, liegt, wird die Sechsecksfläche durch g halbiert und g ist eine Symmetrieachse des Sechsecks.
Die gemeinsamen Punkte X der Geraden g und des Sechsecks UTSRQP sind die Punkte auf der Strecke zwischen dem Mittelpunkt $A(3 \mid 3 \mid 0)$ der Seite UT und dem Mittelpunkt $B\left(\frac{2+0}{2} \mid \frac{0+2}{2} \mid \frac{4+4}{2}\right) = (1 \mid 1 \mid 4)$ der Seite QR.
Somit gilt für diese Punkte die Gleichung:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + v \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}; 0 \leqslant v \leqslant 1$$