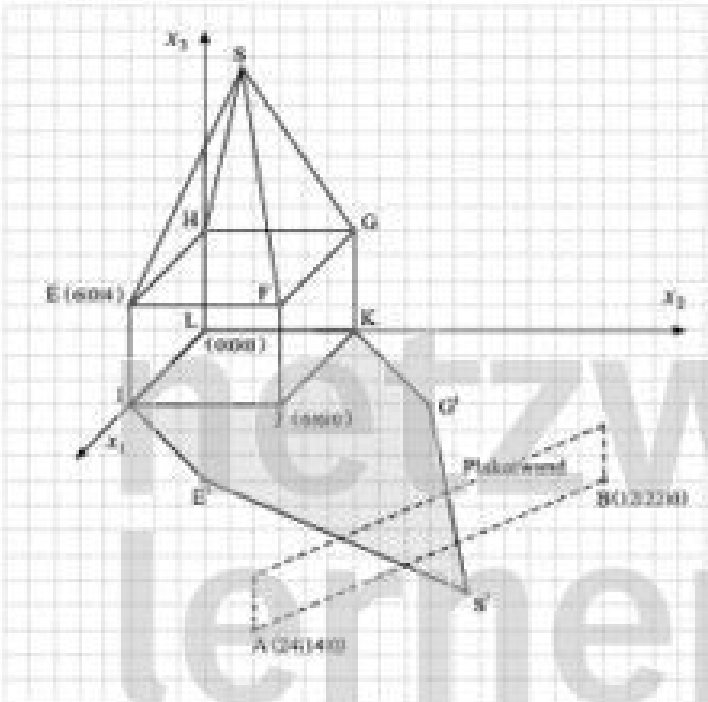
raden g die Einfallsrichtung der Sonnenstrahlen angibt und alle Punkte von g durch α auf den Schnittpunkt von g mit der x_1x_2-Ebene abgebildet werden, beschreibt die Abbildung α die Projektion, die alle Punkte des Raumes entlang des Richtungsvektors des Sonnenlichts in die x_1x_2-Ebene abbildet.

Um den Schatten des Turms einzuzeichnen, benötigt man noch die Koordinaten des Schattenpunktes G', die man durch Schneiden der Geraden g_G durch G mit dem angegebenen Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$) erhält:

Die Gerade g_G hat die Gleichung: $g_G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

Setzt man g_G in $x_3 = 0$ ein, so ergibt sich: $4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2$.
Setzt man $t = 2$ in g_G ein, so erhält man den Schnittpunkt G' dieser Geraden mit der x_1x_2-Ebene : $G'(6 \mid 12 \mid 0)$.
Alternativ kann man auch die Abbildung α verwenden, um die Koordinaten von G' zu berechnen.

Mit $G(0 \mid 6 \mid 4)$ erhält man: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1,5 \\ 0 & 1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G'(6 \mid 12 \mid 0)$



d) Um zu entscheiden, ob der Schatten der Turmspitze auf der Plakatwand zu sehen ist, berechnet man zunächst den Schnittpunkt P der Geraden g_S (siehe Aufgabe b)) mit der Ebene E_P, in der die Plakatwand liegt. Hierzu gibt es zwei alternative Berechnungsmöglichkeiten.

Alternative 1:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Spannvektor der Ebene E_P.

Ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ von E_P muss orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$ und auch orthogonal zur x_3-Achse sein. Daher gilt: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Dies führt zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & -12 \cdot n_1 & + & 8 \cdot n_2 & + & 0 \cdot n_3 & = & 0 \\ \text{II} & 0 \cdot n_1 & + & 0 \cdot n_2 & + & 1 \cdot n_3 & = & 0 \end{array}$$

Gleichung II führt zu $n_3 = 0$.

Wählt man z.B. $n_1 = 2$ und setzt dies in Gleichung I ein, so ergibt sich:

$-12 \cdot 2 + 8 \cdot n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = 3$.

Also ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E_P.

Da der Punkt $A(24 \mid 14 \mid 0)$ in der Ebene E_P enthalten ist, erhält man als Koordinatengleichung der Ebene E_P:

$$E_P: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 = 90$$

Setzt man $g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ in E_P ein, so ergibt sich:

$2(3+3r) + 3(3+3r) = 90 \Rightarrow r = 5$.

Durch Einsetzen von $r = 5$ in g_S erhält man: $P(18 \mid 18 \mid 2)$.

Alternative 2:

Da $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Spannvektoren der Ebene E_P sind und der Punkt $A(24 \mid 14 \mid 0)$ in ihr liegt, erhält man für E_P folgende Parametergleichung: