$$\int_0^4 (f(x) - m \cdot x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^4 \left(3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - m \cdot x\right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{1}{2}m \cdot x^2\right]_0^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right) - \frac{1}{2}m \cdot 4^2 - \left(-\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0\right) - \frac{1}{2}m \cdot 0^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{\pi} - 8 \cdot m + \frac{12}{\pi} + 0 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{\pi} = 0{,}955$$

Für $m = \frac{3}{\pi}$ sind die beiden Flächen A_1 und A_2 gleich groß.

d) Für $S(t) = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ werden die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der gegebenen Daten durch Aufstellen zweier Gleichungen bestimmt:
Im März ist $t = -1$, im Mai ist $t = 1$, also:

$$\begin{array}{llllllll} \text{I} & S(-1) & = & 100 \Rightarrow & a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot (-1)\right) & = & 100 \Rightarrow & a - 0{,}5b = 100 \\ \text{II} & S(1) & = & 200 \Rightarrow & a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) & = & 200 \Rightarrow & a + 0{,}5b = 200 \end{array}$$

Subtrahiert man I von II, ergibt sich $b = 100$.

Setzt man $b = 100$ in I ein, erhält man: $a - 0{,}5 \cdot 100 = 100 \Rightarrow a = 150$.
Somit erhält man als Funktionsgleichung

$$S(t) = 150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

e) Für Oktober gilt $t = 6$, somit ist $S(6) = 150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 150$.
Im Oktober scheint die Sonne 150 Stunden.
Wenn in Freiburg im Oktober die Sonne tatsächlich 156 Stunden scheint, beträgt die Differenz zum Modell 6 Stunden; also ist die prozentuale Abweichung vom Modell zur Wirklichkeit $\frac{6}{156} \approx 0{,}03846 \approx 3{,}8\,\%$.

Den Wertebereich von S erhält man durch Betrachtung der Extremwerte von $S(t)$:
Wegen $-1 \leq \sin x \leq 1$ erhält man als Minimum $150 + 100 \cdot (-1) = 50$ und als Maximum $150 + 100 \cdot 1 = 250$.
Der Wertebereich von S ist somit $\{50 \leq S(t) \leq 250\}$.

f) Man erhält den Zeitraum, in welchem die Sonne mehr als 235 Stunden pro Monat scheint, indem man die Ungleichung $S(t) > 235$ löst:

$$150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) > 235 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) > \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$$

Substituiert man $w = \frac{\pi}{6} \cdot t$, folgt weiter: $\sin w > \frac{17}{20}$
Wegen des Verlaufs der Sinusfunktion und $\sin x = \sin(\pi - x)$ für $0 \leq x \leq \pi$ erhält man mit $w = \sin^{-1}\left(\frac{17}{20}\right) \approx 1{,}016$ als Lösungen:

$$1{,}016 < w < \pi - 1{,}016 \approx 2{,}126$$

Die Resubstitution $\frac{\pi}{6} \cdot t = w$ liefert:

$$1{,}016 < \frac{\pi}{6} \cdot t < 2{,}126 \Rightarrow \frac{1{,}016 \cdot 6}{\pi} < t < \frac{2{,}126 \cdot 6}{\pi} \Rightarrow 1{,}94 < t < 4{,}06$$

Damit scheint die Sonne in Freiburg etwa zwischen Juni ($t_1 \approx 2$) und August ($t_2 \approx 4$) mehr als 235 Stunden pro Monat.
Die durchschnittliche Sonnenscheindauer für die Monate Oktober bis März erhält man, indem man die jeweiligen Werte der Sonnenscheindauer von Oktober bis März monatsweise berechnet, addiert und durch die

Anzahl der Monate teilt (arithmetisches Mittel):

$$\overline{S} \approx \frac{150 + 100 + 63 + 50 + 63 + 100}{6} \approx 87,7$$

Die Sonne scheint von Oktober bis März durchschnittlich etwa 88 Stunden pro Monat.

Die Änderung der Sonnenscheindauer ist $S'(t) = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{50}{3}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$.
Die Extremwerte von $S'(t)$ erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung von $S'(t)$, also $S''(t)$ und $S'''(t)$:

$$S''(t) = -\frac{50\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{25\pi^2}{9} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$
$$S'''(t) = -\frac{25\pi^2}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{25\pi^3}{54} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

Die notwendige Bedingung $S''(t) = 0$ führt zu $-\frac{25\pi^2}{9} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 0$ bzw. $\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 0$.
Substituiert man $z = \frac{\pi}{6} \cdot t$, so erhält man $\sin z = 0$ mit den Lösungen $z_k = k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$.
Die Resubstitution $\frac{\pi}{6} \cdot t = z$ ergibt:

$$\frac{\pi}{6} \cdot t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$$
$$\frac{\pi}{6} \cdot t = \pi \Rightarrow t_2 = 6$$

Weitere Lösungen sind nicht relevant, da sich dieselben Monate ergeben.
Setzt man $t_1 = 0$ und $t_2 = 6$ in $S'''(t)$ ein, so ergibt sich:

$$S'''(0) = -\frac{25\pi^3}{54} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = -\frac{25\pi^3}{54} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$
$$S'''(6) = -\frac{25\pi^3}{54} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = \frac{25\pi^3}{54} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Somit ändert sich die Sonnenscheindauer am raschesten im April ($t = 0$) und im Oktober ($t = 6$).