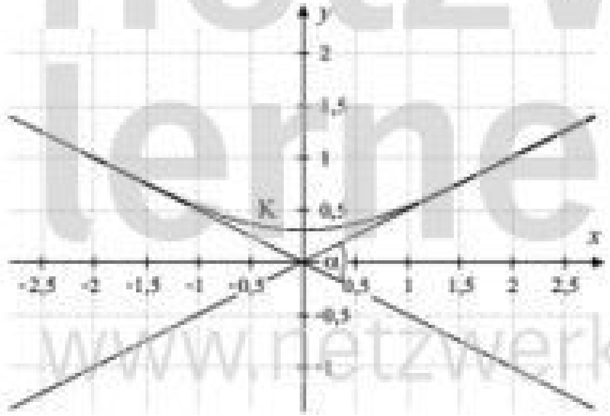
und

$$h''(2) = \frac{-\frac{1}{32}\cdot 2^2 + \frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{8}\cdot 2^2 + \frac{1}{2}\right)^2} = 0$$

Somit erfüllt die Funktion h alle geforderten Bedingungen.

Zur Anfertigung einer Zeichnung erstellt man noch eine Wertetabelle:

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$h(x)$	1	0,53	0,37	0,31	0,37	0,53	1

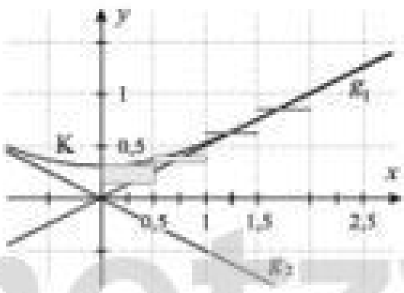


c) Den Flächeninhalt A_1 des Flächenstücks zwischen dem Graphen von f und den Geraden g_1 und g_2 erhält man mit Hilfe des Integrals.
Aufgrund der Symmetrie des Flächenstücks zur y-Achse genügt es, die Berechnung auf das Intervall $[0;2]$ zu beschränken; da der Graph von f oberhalb der Geraden g_1 verläuft, gilt:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2\cdot\int_0^2 \Big(f(x) - g_1(x)\Big)\,dx \\
&= 2\cdot\int_0^2 \left(-\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}x\right)dx \\
&= 2\cdot\left[-\frac{1}{640}x^5 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}x^2\right]_0^2 \\
&= 2\cdot\left(-\frac{1}{640}\cdot 2^5 + \frac{1}{16}\cdot 2^3 + \frac{3}{8}\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 - \left(-\frac{1}{640}\cdot 0^5 + \frac{1}{16}\cdot 0^3 + \frac{3}{8}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 0^2\right)\right) \\
&= 0{,}4\ \text{FE}
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A_1 des Flächenstücks zwischen dem Graphen von f und den Geraden g_1 und g_2 beträgt somit $0{,}4\,\text{km}^2$.

Zur Bestimmung des Flächeninhalts A_2 des Flächenstücks zwischen dem Graphen von h und den Geraden g_1 und g_2 genügt es aufgrund der Symmetrie von h (und damit auch des Flächenstücks) zur y-Achse, die Berechnung auf das Intervall $[0;2]$ zu beschränken.
Um den Flächeninhalt numerisch zu bestimmen, gibt es verschiedene Näherungsmethoden.
Eine Möglichkeit ist die Rechtecksmethode, dabei wird das Integral näherungsweise durch Rechtecke angenähert.
Da laut Aufgabenstellung insgesamt 8 Teilintervalle reichen, kann man das Intervall $[0;2]$ in 4 Teilintervalle mit Breite 0,5 unterteilen. Ihre Höhe beträgt jeweils die Differenz aus $h(x)$ und $g_1(x)$ in der Mitte des Intervalls:



Damit gilt:

$$\begin{aligned} A_2 &\approx 2\cdot\left(0,5\cdot\left(h\left(\frac{1}{4}\right)-g_1\left(\frac{1}{4}\right)\right)+0,5\cdot\left(h\left(\frac{3}{4}\right)-g_1\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right.\\ &\qquad \left.+0,5\cdot\left(h\left(\frac{5}{4}\right)-g_1\left(\frac{5}{4}\right)\right)+0,5\cdot\left(h\left(\frac{7}{4}\right)-g_1\left(\frac{7}{4}\right)\right)\right)\\ &\approx 2\cdot(0,0987+0,0317+0,0058+0,0002)\\ &= 0,2728\text{ FE} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A_2 des Flächenstücks zwischen dem Graphen von h und den Geraden g_1 und g_2 beträgt nach Berechnung durch die Rechteckmethode somit etwa $0,27\,\text{km}^2$.

Eine weitere Methode ist die Simpson'sche Regel, bei der das Intervall $[a;b]=[0;2]$ in $2\cdot n$ Teilstücke unterteilt wird. Da aufgrund der Symmetrie mit 4 Teilintervallen gerechnet werden kann (Aufgabenstellung), ist $n=2$.
Damit ergibt sich für die Teilintervallbreite $h=\frac{b-a}{2n}=\frac{2-0}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$ und für $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{3}{2}$ und $x_4=2$. Für eine Funktion $f(x)$ gilt damit:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_4)+2\cdot(f(x_2))+4\,(f(x_1)+f(x_3))\right]$$

Mit $f(x)=h(x)-g_1(x)$ erhält man: $f(x_0)\approx 0,3069$, $f(x_1)\approx 0,1175$, $f(x_2)\approx 0,0300$, $f(x_3)\approx 0,0031$ und $f(x_4)=0$
Damit ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt A_2:

$$\begin{aligned} A_2 = 2\cdot\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &\approx 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{3}\left[0,3069+0+2\cdot(0,0300)+4\cdot(0,1175+0,0031)\right]\\ &\approx 0,2831 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A_2 des Flächenstücks zwischen dem Graphen von h und den Geraden g_1 und g_2 beträgt nach Berechnung mit Hilfe der Simpson'schen Regel somit etwa $0,28\,\text{km}^2$.

Eine Methode, die ohne Teilintervalle auskommt, ist die Kepler'sche Fassregel:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4\cdot f\left(\frac{b-a}{2}\right)+f(b)\right]$$

Mit den Intervallgrenzen $a=0$, $b=2$ und $f(x)=h(x)-g_1(x)=1+\ln\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1+\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\ f(1) &= 1+\ln\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\\ f(2) &= 1+\ln(1)-1=0 \end{aligned}$$