2. Die Keplersche Fassregel

Die Keplersche Fassregel dient zur Berechnung der Querschnittsfläche – und damit das Volumen – eines Fasses, bzw. einer nicht mit den Formeln $A = \pi \cdot r^2$ bzw. $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ berechenbaren "Tonne".
Mit den Größen h (Höhe des Fasses), f(r) (Deckelradius), f(m) (Mittelradius) und f(s) (Bodenradius) ergibt sich die Formel für die Querschnittsfläche:

$$(1) \quad A = \frac{h\,(f(r) + 4f(m) + f(s))}{6}$$

Näherungsweise lässt sich zudem das Volumen berechnen:

$$(2) \quad V = \pi \cdot h \cdot \frac{f(r)^2 + 5\,f(m)^2 + f(s)^2 + f(m)\,f(r) + f(m)\,f(s)}{9}$$

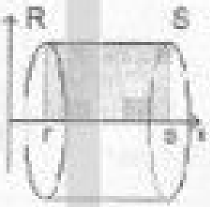
(Die Bezeichnungen für Radien usw. werden aus Herleitung ersichtlich.)
Hinweis: Entgegen vieler falscher Annahmen ist die Keplersche Fassregel die **Formel zur Berechnung der Querschnittsfläche eines Fasses** (1) ! und nicht die zur Berechnung des Flächeninhalts!

3. Herleitung

Das Problem bei der Berechnung der Querschnittsfläche (und damit des

Abb. 1


Volumens) eines Fasses ist, dass es meist mehrere verschieden Radien besitzt. Für eine normale Tonne wäre das Volumen einfach durch $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ berechenbar, da aber ein Fass gewölbt ist und es dafür keine exakte Berechnung gibt, ist die Fläche (und das Volumen) auch durch die Keplersche Fassregel nur näherungsweise bestimmbar.
Zur Vereinfachung wird nun zuerst eine normale Tonne im liegendenden bzw. „aufgehängtem" Zustand betrachtet. Man hängt die Tonne praktisch entlang einer Achse auf, wofür man die x-Achse eines Koordinatensystems nimmt, sodass man den Radius durch eine Funktion f ausdrücken kann:

Abb. 2


r = Fassdeckelmitte
s = Fassbodenmitte
R, S = Endpunkte des Bogens
→ neues Volumen $V = \pi \cdot f(s)^2 \cdot h$

Zur weiteren Veranschaulichung wird das Fass nun nicht mehr als räumlicher Körper betrachtet, sondern als um die x-Achse rotierendes Rechteck. Das Volumen wird also nun durch das Rechteck (obere Begrenzung RS, untere Begrenzung X-Achse) als Rotationskörper beschrieben. Die Keplersche Fassregel gibt den Inhalt der Fläche solcher Körper an.

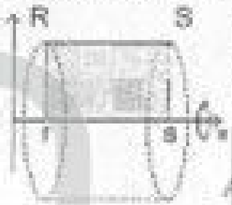


Abb. 3

Der Bogen des Fasses kann zwar durch eine Funktion beschrieben werden, diese gibt den Radius des Fasses allerdings nur an der Stelle x an (doch das Problem sind die unterschiedlichen Radien) also ist es sinnvoll, den Bogen in zwei Abschnitte zu unterteilen.

Abb. 4

Diese beiden Trapeze sind nun leichter zu berechnen, allerdings leidet auch die Genauigkeit der Rechnung durch diese „Approximation", welche später jedoch wieder etwas ausgeglichen wird (vgl. ALN Kerstin: Ober- und Untersumme von Flächeninhalten)

→ Flächeninhalt eines Trapezes: A = Mittelparallele · Höhe

Für den linken Abschnitt ergibt sich :

Höhe: halbe Höhe des Fasses, $\rightarrow \frac{h}{2}$; Mittelparallele : arithmetisches Mittel von f(r) und f(m)

$$\rightarrow A_{mr} = \frac{h\,(f(r) + f(m))}{4} \quad \text{und} \quad A_{ms} = \frac{h\,(f(m) + f(s))}{4}$$

Die Summe beider Trapeze ergibt die Fläche des oben angesprochenen Rotationskörpers:

$$\rightarrow A_1 = \frac{h\,(f(r) + 2\,f(m) + f(s))}{4}$$

Nun ist diese Methode allerdings etwas ungenau, da kleine Teile des Fasses fehlen. Aus diesem Grunde berechnet man, wie bei der Bestimmung von Flächeninhalten bei Kurven (Ober- und Untersumme), einen zweiten Wert aus, diesmal einen etwas zu großen:

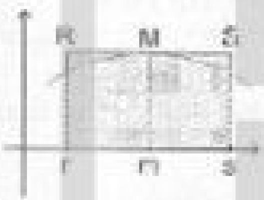


Abb. 5

$\rightarrow A_2 = h \cdot f(m)$