Vorwort

Dieses Skript soll euch helfen, die Konzepte und Verfahren der Analytischen Geometrie besser verstehen zu können. Wir werden euch Mittel und Wege zeigen, wie man spezifische Aufgabenstellungen lösen kann. Diese Aufgabenstellungen bilden dann später die Grundlage für komplexe Abi-Aufgaben. Deshalb legen wir euch nahe, die Kapitel Stück für Stück durchzuarbeiten und euch mit den Grundlagen vertraut zu machen. Rechnet am besten jedes Beispiel, das wir euch zeigen, einmal selber durch. Natürlich kann man die Problemstellungen auch anders lösen, aber wir glauben, dass es mit den hier vorgestellten Verfahren am einfachsten und schnellsten geht.

Die Ausrede: „Ich kapier die Aufgabe nicht!“ lassen wir nicht mehr gelten. Unsere Verfahren sind so ausgelegt, dass man sie auswendig lernen kann. Es ist also nicht mehr eine Frage des Verständnisses, sondern eine Frage des Fleißes. Wenn ihr mit diesem Skript intensiv arbeitet, werdet ihr merken, dass sich alles, was ihr in der Analytischen Geometrie kennenlernen werdet, auf ein paar Grundlagen reduzieren lässt.

Unser Appell an euch ist: Arbeitet hart und fleißig. Und wer weiß, vielleicht wird die/der eine oder andere unter euch ihren/seinen Gefallen an der Mathematik finden. Wir wünschen euch auf jeden Fall viel Erfolg und Spaß mit diesem Buch.

I.1 Lineare Algebra

Wir ersparen euch die Definition der linearen Algebra, weil ihr sie erstens nicht braucht und zweitens alles was mit Vektoren zu tun hat unter die lineare Algebra fällt (zumindest bei euch). Kommen wir nun zur Grundlage der linearen Algebra, den linearen Gleichungssystemen (LGS). Ihr müsst wissen, wie man diese LGS löst und wie man sie umformt. Wir versuchen zwar ohne sie auszukommen, aber die meisten Verfahren sind nur effizient, wenn sie LGS's beinhalten. Also falls ihr noch Probleme mit ihnen habt, dann hilft nur üben, üben, üben...

I.1.1 Definition eines LGS:

Unter einem LGS versteht man mehrere lineare Gleichungen die zur selben Zeit, also mit denselben Werten für die Variablen erfüllt werden sollen.

Hinweis:

Ein LGS hat entweder keine, eine oder unendlich viele Lösungen

Machen wir ein einfaches Beispiel. Aufgabe: Ein alter weiser Mann stellt euch ein Rätsel:

„Archimedes hat einen Bruder namens Pythagoras. Pythagoras ist in 3 Jahren doppelt so alt wie Archimedes und war vor einem Jahr dreimal so alt wie Archimedes. Wie alt sind Archimedes und Pythagoras?"

Um diese Aufgabe analytisch zu lösen, müssen wir zuerst einige Definitionen machen. Wir brauchen Variablen für das jetzige Alter von Archimedes und Pythagoras. Sei x das Alter von Archimedes und y das Alter von Pythagoras. Nun müssen wir die Aussagen mathematisch umdeuten:In drei Jahren ist Pythagoras doppelt so alt wie Archimedes, kann man mathematisch ausdrücken durch: $(I) \quad 2\cdot(x+3)=y+3$

Vor einem Jahr war Archimedes dreimal so alt wie Pythagoras: $(II) \quad 3\cdot(x-1)=y-1$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich ein LGS formen, da beide Gleichungen mit denselben Werten der Variablen x und y erfüllt sein müssen.

$$\text{LGS:}\quad \begin{array}{ll} (I) & 2\cdot(x+3)=y+3 \\ (II) & 3\cdot(x-1)=y-1 \end{array}$$

Um dieses LGS zu lösen habt ihr in der achten Klasse das Gauß'sche Eliminationsverfahren kennengelernt. Um Gauß benutzen zu können, müsst ihr das LGS erstmal auf Normalform bringen:

$$\begin{array}{ll} (I) & 2\cdot x+6=y+3 \\ (II) & 3\cdot x-3=y-1 \\ \hline (I) & 2\cdot x-y=-3 \\ (II) & 3\cdot x-y=2 \end{array}$$

Ihr seht also, die Normalform hat die Variablen mit ihren Koeffizienten (Zahlen die mit mal bei den Variablen stehen) auf der linken Seite, die Zahlen auf der rechten Seite.

Hinweis:

Ihr dürft die Gleichungen beliebig vertauschen. Also könnte auch Gleichung (I) unten stehen und Gleichung (II) oben. Auch die Namen der Gleichungen (I), (II) sind beliebig

$$\begin{matrix}(I)\ 2\cdot x-y=-3\\(II)\ 3\cdot x-y=2\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}(I)\ 3\cdot x-y=2\\(II)\ 2\cdot x-y=-3\end{matrix}$$

Kommen wir jetzt zu Gauß: Man muss versuchen in der zweiten Zeile eine Variable zu eliminieren. Dies funktioniert, indem man jeweils eine Zeile mit einem Skalar (reelle Zahl) multipliziert und sie zu einer anderen addiert. Natürlich sollt ihr so multiplizieren, dass nach der Addition eine Variable raus fällt. Hier könnte man die erste Zeile mit -3, die zweite mit 2 multiplizieren und anschließend addieren. Das Ergebnis wäre dann:

$$\begin{array}{lrl}(I) & 2\cdot x-y=-3 & |\cdot(-3)\\(II) & 3\cdot x-y=2 & |\cdot 2 \quad +\\\hline (I) & 2\cdot x-y=-3 & \\\boxed{(III)=-3\cdot(I)+2\cdot(II)} & y=13 & \end{array}$$

Das rot umrandete Konstrukt bedeutet, dass die erste Zeile, nachdem sie mit -3 multipliziert wurde, zur zweiten addiert wird, nachdem diese mit 2 multipliziert wurde. Das Ergebnis wird in die zweite Zeile geschrieben, da der Pfeil auf die zweite Zeile zeigt. Die erste Zeile wird nicht verändert, auf sie zeigt ja auch kein Pfeil.

Die Gleichung (II) bekommt einen neuen Namen, da sie verändert wurde. Sie heißt ab jetzt (III) und ist entstanden, durch das, was blau umrandet ist.

1. Zeile mit -3 multipliziert:

$$-6\cdot x+3\cdot y=9$$

2. Zeile mit 2 multipliziert:

$$6\cdot x-2\cdot y=4$$

jetzt noch beide addieren:

$$\underbrace{-6\cdot x+3\cdot y}_{\text{linke Seite von (I)}}+\underbrace{6\cdot x-2\cdot y}_{\text{linke Seite von (II)}}=\underbrace{9}_{\text{rechte Seite von (I)}}+\underbrace{4}_{\text{rechte Seite von (II)}}$$

$$\Leftrightarrow -6\cdot x+6\cdot x+3\cdot y-2\cdot y=9+4$$
$$\Leftrightarrow y=13$$

Ihr seht also die Operation war erfolgreich und x ist aus der zweiten Zeile herausgefallen. Jetzt muss noch y in (I) eingesetzt werden, somit erhält man:

$$2\cdot x-13=-3$$
$$2\cdot x=10$$
$$x=\frac{10}{2}=5$$

Es gilt: $x = 5$ und $y = 13$, d. h. Archimedes ist 5, Pythagoras ist 13.

I.1.2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Es ist üblich, die Lösung eines LGS als **Lösungsvektor** aufzuschreiben. Zunächst klären wir, was man eigentlich als Vektor versteht. Ein Vektor ist eine Anordnung von Zahlen (Relation), bei der die Stellung der einzelnen Zahlen eine Rolle spielt. In der linearen Algebra, ist es üblich einen Vektor mit einem Pfeil zu kennzeichnen. Somit schreiben wir für unseren Lösungsvektor: $\vec{l}$.

$\vec{l}$ hat im obigen Beispiel die Dimension 2, da wir 2 Variablen haben, man schreibt:

$$\boxed{\vec{l}\in\mathbb{R}^2, \vec{l}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, mit\ x, y\in\mathbb{R}}$$

Bei unserem Beispiel wäre die Lösung also: $\vec{l}=\begin{pmatrix}5\\13\end{pmatrix}$. Man sagt auch, dass LGS hat die Lösungsmenge:

$$L=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\13\end{pmatrix}\right\}.$$

Lasst euch bloß nicht von der Schreibweise verunsichern. Wir haben uns hier mal für die formal korrekte Schreibweise entschieden. (Lösungs-)Mengen sind wie folgt aufgebaut:

L = { was ist überhaupt drin | was gilt für das, was drin ist}.

Mal ein kleines Beispiel:

Euer Mathelehrer hat einen Bauernhof. Ihr wollt jetzt die Menge der Tiere definieren, die sich auf seinem Bauernhof befinden. Nennen wir diese Menge M_{Tiere}. Für diese Menge gilt also:

$$M_{Tiere}=\{x \text{ ist ein Tier} \mid x \text{ befindet sich auf dem Bauernhof eures Mathelehrers}\}$$

Oder ihr wollt die Punkte des Graphen der Funktion f in einer Menge zusammenfassen:

$$G_f=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=f(x)\}$$

Vektoren werden auch in der analytischen Geometrie verwendet, dort beschreiben sie Richtungen und Längen, haben aber immer noch dieselbe mathematische Bedeutung, sie werden nur anders interpretiert.

Wie oben schon erwähnt hat ein LGS keine, eine oder unendlich viele Lösungen

Keine Lösung:

- Ein LGS hat keine Lösung wenn es eine Zeile gibt, in der ein Widerspruch besteht, also z.B. 1 = 0. Kurze Erinnerung: In einem LGS müssen alle Gleichungen unter den gleichen Werten der Variablen gelten, 1 = 0 kann aber nie gelten, ergo hat das LGS keine Lösung.

Bsp.:

$$\begin{array}{llllllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12 & |\cdot(-2) & |\cdot(-1) \\
(II) & 2\cdot x & - & 3\cdot y & - & 4\cdot z & = & -16 & & \\
(III) & x & - & y & - & z & = & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12 & \\
(IV)=-2\cdot(I)+(II) & & - & 5\cdot y & - & 10\cdot z & = & -40 & |\cdot(-2) \\
(V)=-(I)+(III) & & - & 2\cdot y & - & 4\cdot z & = & -12 & |\cdot 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12 \\
(IV) & & - & 5\cdot y & - & 10\cdot z & = & -40 \\
\boxed{(VI)=-2\cdot(IV)+5\cdot(V)} & & & & & 0 & = & 20
\end{array}$$

Widerspruchszeile !!!

Genau eine Lösung:

- Ein LGS hat genau eine Lösung, wenn man es komplett auf Dreiecksstufenform bringen kann, also wenn in jeder Zeile eine Variable weniger vorkommt und in der letzten Zeile Variable = Zahl steht.

Bsp.:

$$\begin{array}{llllllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 5 & |\cdot(-2) & |\cdot(-1) \\
(I) & 2\cdot x & - & 3\cdot y & - & 4\cdot z & = & -5 & & \\
(III) & x & - & y & + & z & = & 1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 5 & \\
(IV)=-2\cdot(I)+(II) & & - & 5\cdot y & - & 10\cdot z & = & -15 & |\cdot(-2) \\
(V)=-(I)+(III) & & - & 2\cdot y & - & 2\cdot z & = & -4 & |\cdot 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 5 \\
(IV) & & - & 5\cdot y & - & 10\cdot z & = & -15 \\
(VI)=-2\cdot(IV)+5\cdot(V) & & & & & 10\cdot z & = & 10
\end{array}$$

Dreiecksstufenform

Aus der Dreiecksform ist ersichtlich, dass das LGS genau eine Lösung hat, und zwar $\vec{l}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Die

Lösungsmenge wäre dann: $L=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Unendlich viele Lösungen:

- Das LGS hat unendlich viele Lösungen, wenn es mehr Variablen als Gleichungen hat. Auch LGS mit gleich vielen Variablen wie Gleichungen können unendlich viele Lösungen haben, wenn eine Zeile keine Aussagekraft mehr hat. Man darf Gleichungen aus einem LGS entfernen, wenn sie die Form **0 = 0** haben, denn 0 = 0 ist immer wahr und hat keinen Einfluss mehr auf die Variablen.[1]

Bsp.:

$$\begin{array}{llllllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12 & |\cdot(-2) & |\cdot(-1)\\
(II) & 2\cdot x & - & 3\cdot y & - & 4\cdot z & = & -16 & & \\
(III) & x & - & y & - & z & = & -4 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12 & \\
(IV)=-2\cdot(I)+(II) & & - & 5\cdot y & - & 10\cdot z & = & -40 & |\cdot(-2)\\
(V)=-(I)+(III) & & - & 2\cdot y & - & 4\cdot z & = & -16 & |\cdot 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12\\
(IV) & & - & 5\cdot y & - & 10\cdot z & = & -40\\
\boxed{(VI)=-2\cdot(IV)+5\cdot(V)} & & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

Nullzeile fällt weg

Die dritte Gleichung fällt also weg, das entstehende LGS hat folgende Form:

$$\begin{array}{llllllll}
(I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12\\
(IV) & & - & 5\cdot y & - & 10\cdot z & = & -40
\end{array}$$

Um die Lösung anzugeben muss man nun eine Variable wählen: Hierzu formt man die Gleichung mit den wenigsten Variablen nach einer um. In unserem Beispiel wäre das Gleichung (IV). (IV) nach y aufgelöst ergibt: $(IV)\ y=8-2\cdot z$

wähle $z=t$, $t\in\mathbb{R}$ z in (IV) eingesetzt: $y=8-2\cdot t$

z und y in (I) eingesetzt: $\begin{array}{l} x+(8-2\cdot t)+3\cdot t=12\\ \Leftrightarrow x+8+t=12\\ \Leftrightarrow x=4-t\end{array}$ Für den Lösungsvektor gilt dann:

$\vec{l}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-t\\8-2\cdot t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ Man sieht also, dass es unendlich viele Lösungen gibt, die von der Wahl des Parameters t abhängen.

1 Die Zeile 0 = 0 wird auch als Nullzeile bezeichnet.

Hinweis:

Wichtig hierbei ist, dass ihr eine Lösung angebt, die möglichst variabel ist. Man sagt einfach, dass z irgendeine Zahl ist, in unserem Fall t und diese Zahl aus der Menge der reellen Zahlen gewählt werden darf. Man wählt grundsätzlich n Variablen, wobei gilt:

n = Anzahl der Variablen – Anzahl der Gleichungen

Hätte man nun eine Gleichung und drei Variablen, so müsste man 2 Variablen wählen, z. B. $x=s$ *und* $y=t$, $s,t\in\mathbb{R}$

Es ist jedoch nicht immer geschickt, für eine Variable t zu wählen. Sehen wir uns hierzu ein Beispiel an:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} (I) & x & + & 2\cdot y & + & 3\cdot z & = & 0 \quad |\cdot(-1) \quad |\cdot(-3) \\ (II) & x & + & 6\cdot y & + & 5\cdot z & = & 8 \\ (III) & 3\cdot x & + & 14\cdot y & + & 13\cdot z & = & 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} (I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12 \\ (IV)=-(I)+(II) & & & 4\cdot y & + & 2\cdot z & = & 8 \quad |\cdot(-2) \\ (V)=-3\cdot(I)+(III) & & & 8\cdot y & + & 4\cdot z & = & 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} (I) & x & + & y & + & 3\cdot z & = & 12 \\ (IV) & & & 4\cdot y & + & 2\cdot z & = & 8 \\ (VI)=-2\cdot(IV)+(V) & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Auch hier fällt wieder die letzte Zeile weg, muss sie ja auch, sonst hätten wir ja nicht unendlich viele Lösungen und könnten keine Variable wählen.

Gleichung (IV) nach y aufgelöst:

$$(IV)\ y=2-\frac{1}{2}\cdot z$$

Würde man jetzt für z wiederum t wählen, so ergäbe sich:

$$y=2-\frac{1}{2}\cdot t$$

Ihr seht also man würde für y einen Term mit einem Bruch erhalten und Brüche sind ja ähnlich wie Schwiegermütter, die kann ja auch niemand leiden. Also benutzen wir einfach einen Trick. Man darf doch für z eine beliebige Zahl wählen. Diese Zahl bleibt doch auch beliebig, wenn man irgendeine Zahl mit 2 multipliziert. Man nimmt also für z nicht t, sondern 2t.

Wähle: $z=2t,\ t\in\mathbb{R}$

z in (IV) eingesetzt: $y=2-\frac{1}{2}\cdot 2t=2-t$

Dieses Ergebnis für y ist doch viel besser, außer man rechnet gern mit Brüchen.

y, z in (I) eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
& x+2\cdot(2-t)+3\cdot 2\cdot t=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x+4-2\cdot t+6\cdot t=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x=-4-4\cdot t
\end{aligned}
$$

Als Lösungsvektor ergibt sich dann: $\vec{l}=\begin{pmatrix}-4-4\cdot t\\ 2-t\\ 2\cdot t\end{pmatrix}$

Hinweis:

Im Folgenden werden die Pfeile und die genaue Beschreibung, wie die nächste Zeile entstanden ist, weggelassen. Es werden nur noch die Multiplikatoren aufgelistet. Gleichungen werden grundsätzlich addiert. Ihr solltet euch angewöhnen die Pfeile und die Multiplikatoren immer hin zuschreiben, da ihr bei möglichen Fehlern diese besser wiederfindet.

In welcher Reihenfolge ihr die Zeilen miteinander addiert ist egal, wir werden aber weiterhin immer die erste mit der zweiten Zeile, danach die erste mit der dritten Zeile usw. addieren.