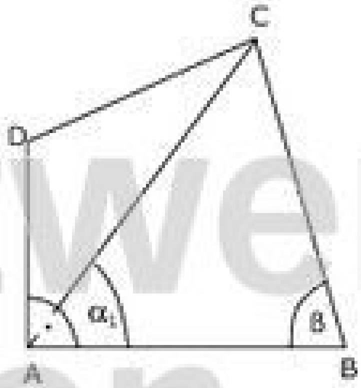
Abschlussprüfung 2004

2004 Pflichtaufgabe 1:

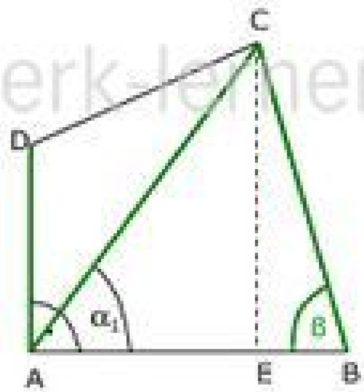


Im Viereck ABCD sind gegeben:

$\overline{AC} = 10{,}7$ cm
$\overline{AD} = 5{,}5$ cm
$\overline{BC} = 9{,}6$ cm
$ß = 48{,}2°$

Berechnen Sie den Winkel α_1.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ACD?

Lösung:



Für den Winkel α_1 brauchen wir ein rechtwinkliges Dreieck: Höhe im Dreieck ABC. Im Δ AEC können wir dann α_1 berechnen, wenn wir noch ein zweites Bestimmungsstück haben. Das kann nur die Höhe $\overline{EC}$ sein, die wir im Δ BEC berechnen können.

Δ BEC:

$$\sin ß = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{EC} = \overline{BC} \cdot \sin ß = 9{,}6 \cdot \sin 48{,}2° = 7{,}2 \text{ cm}$$

Δ AEC:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} = \frac{7{,}2}{10{,}7} \Rightarrow \underline{\alpha_1 = 42{,}3°}$$

Die gesuchte Fläche des Dreiecks ACD berechnet man am einfachsten als Differenz des Trapezes AECD und des Dreiecks AEC. Dazu müssen wir noch die Strecke $\overline{AE}$ berechnen:

Δ AEC:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \cos \alpha 1 = 10{,}7 \cdot \cos 42{,}3° = 7{,}9 \text{ cm}$$

Δ ACD:

$$A = A_{Tr} - A_{\Delta}$$

$$\underline{A} = \frac{a+c}{2} \cdot h - \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{EC}}{2} \cdot \overline{AE} - \frac{\overline{AE} \cdot \overline{EC}}{2} = \frac{5{,}5 + 7{,}2}{2} \cdot 7{,}9 - \frac{7{,}9 \cdot 7{,}2}{2} = \underline{21{,}7 \text{ cm}^2}$$

Es ist auch ein anderer Lösungsweg denkbar: α auf 90° ergänzen, die Höhe des Dreiecks ACD ausrechnen (= Lot von D auf $\overline{AC}$) und dann die Fläche.

2004 Pflichtaufgabe 2:

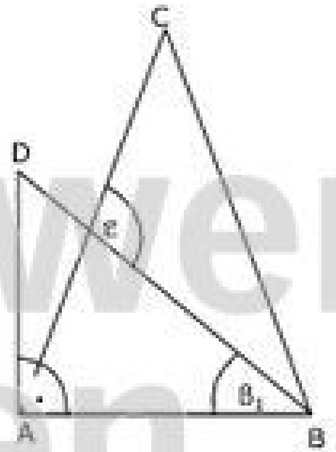
Das rechtwinklige Dreieck ABD und das gleichschenklige Dreieck ABC haben die Seite $\overline{AB}$ gemeinsam.
Es gilt:

$\overline{AD} = 3{,}1\ \text{cm}$

$\overline{AC} = \overline{BC} = 5{,}9\ \text{cm}$

$\beta_1 = 31{,}7°$

Berechnen Sie den Winkel ε.



Lösung:

Δ ABD:

$$\tan\beta_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AD}}{\tan\beta_1} = \frac{3{,}1}{\tan 31{,}7°} = 5{,}0\text{cm} \Rightarrow \overline{EB} = \frac{\overline{AB}}{2} = 2{,}5\ \text{cm}$$

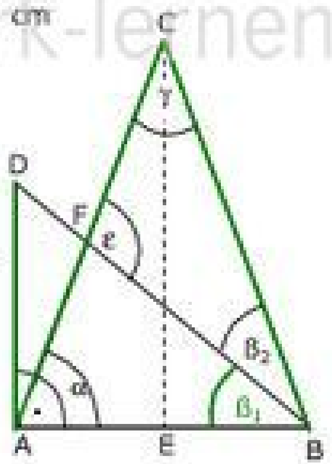
Δ BEC:

$\beta = \beta_1 + \beta_2$

$$\cos\beta = \frac{\overline{EB}}{\overline{BC}} = \frac{2{,}5}{5{,}9} \Rightarrow \beta = 64{,}9° \Rightarrow \beta_2 = \beta - \beta_1 = 64{,}9° - 31{,}7° = 33{,}2°$$

Der Winkel β ist Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC, also ist $\alpha = \beta$, oder

$\gamma = 180° - 2 \cdot \beta = 180° - 2 \cdot 64{,}9° = 50{,}2°$



Δ BCF:

$\underline{\varepsilon} = 180° - \beta_2 - \gamma = 180° - 33{,}2° - 50{,}2° = \underline{96{,}6°}$

2004 Pflichtaufgabe 3:

Lösen Sie das Gleichungssystem:

(1) $x + 2(y+2) = 12$

(2) $\frac{1}{2}(x+4) - 3(y-1) = -3$

Lösung:

Bei Gleichungssystemen muss man die einzelnen Gleichungen immer so umformen, dass man eines der Lösungsverfahren anwenden kann (Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren). Das Ziel bei jedem Verfahren ist, eine Variable zu eliminieren und so nur noch eine Gleichung mit einer Variablen zu erhalten. Um den Überblick nicht zu verlieren ist es empfehlenswert, die Nummerierung der Gleichung fortzuführen und immer beide Gleichungen (sie gehören ja zusammen) aufzuschreiben, auch wenn nichts verändert wurde. Ein Trennstrich unterstützt dies.

(1) $x + 2y + 4 = 12$ $\quad |-4$

(2) $\frac{1}{2}x + 2 - 3y + 3 = -3$ $\quad |\cdot 2$ (damit verschwindet der Bruch)

---

(1) $x + 2y = 8$ $\quad |-2y$

(2) $x + 4 - 6y + 6 = -6$

Da beide Gleichungen auf der linken Seite gleich viel x enthalten, bietet sich das Gleichsetzungsverfahren an. Dazu muss man beide Gleichungen nach x umstellen.

---

(1) $x = 8 - 2y$

(2) $x + 10 - 6y = -6$ $\quad |-10+6y$

---

(1) $x = 8 - 2y$

(2) $x = -16 + 6y$

Nun kann man die rechten Seiten der Gleichungen gleichsetzen, da die linken Seiten auch gleich sind!

---

(1) = (2):

$8 - 2y = -16 + 6y$ $\quad |+16+2y$

$24 = 8y$ $\quad |:8$

$y = 3$

(1): $x = 8 - 2\cdot 3 = 2$

Lösung: x = 2 und y = 3

2004 Pflichtaufgabe 4:

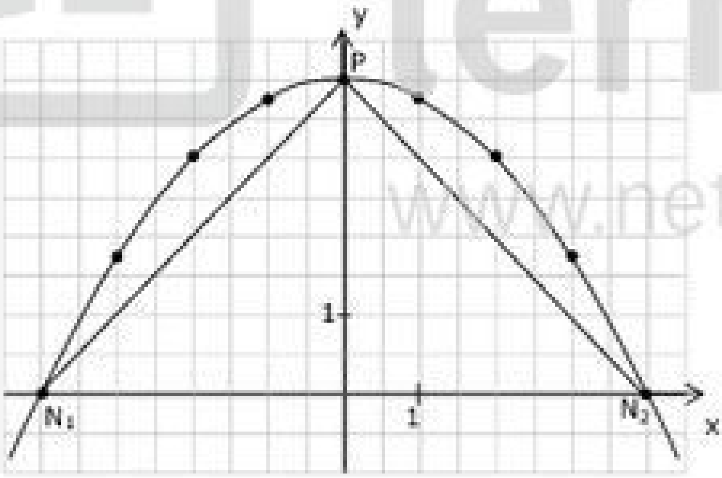
Eine Parabel hat die Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Zeichnen Sie das Schaubild der Parabel in ein Koordinatensystem.

Die drei Schnittpunkte der Parabel mit den Koordinatenachsen bilden ein Dreieck.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks.

Lösung:



Die Zeichnung der Parabel ist möglich mit einer Wertetabelle, aber auch mit den Eigenschaften ihrer Funktionsgleichung:

Minuszeichen vor dem x²:
nach unten geöffnet

3 vor dem x²:
Jeder y-Wert der Normalparabel muss durch 4 dividiert werden

+4:
Die Parabel schneidet die y-Achse im Punkt (0|4)

Schnittpunkte der Parabel mit den Achsen:

mit der y-Achse: P(0|4) (kann der Funktionsgleichung entnommen werden, oder x=0 setzen)

mit der x-Achse: y = 0 setzen:

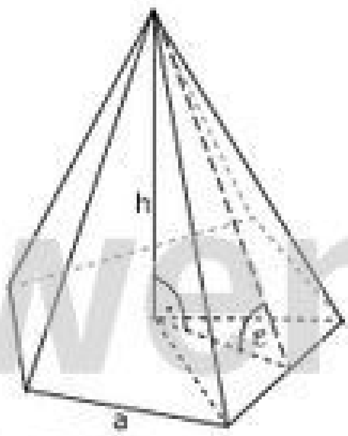
$$0 = -3x^2 + 4 \qquad | \cdot 4$$
$$0 = -x^2 + 16 \qquad | +x^2$$
$$x^2 = 16 \qquad | \pm\sqrt{\ }$$
$$x_{1/2} = \pm 4 \quad \Rightarrow N_1(-4|0) \text{ und } N_2(4|0)$$

Da die Parabel achsensymmetrisch zur y-Achse ist, ist es das Dreieck auch, also ist $\overline{N_1P} = \overline{N_2P}$.

$$\overline{N_1P}^2 = \overline{N_1O}^2 + \overline{OP}^2 \Rightarrow \overline{N_1P} = \sqrt{\overline{N_1O}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5{,}7 \text{ LE}$$

Δ N₁N₂P: $\underline{u =} \overline{N_1N_2} + \overline{N_1P} + \overline{N_2P} = 8 + 5{,}7 + 5{,}7 = \underline{19{,}4 \text{ LE}}$

2004 Pflichtaufgabe 5:



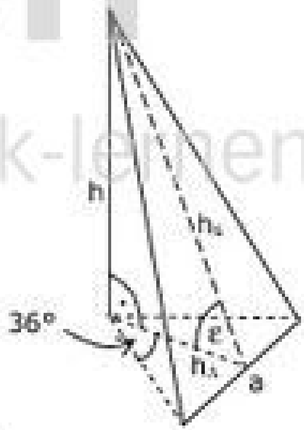
Von einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide sind gegeben:

$a = 6{,}4$ cm
$M = 170\ \text{cm}^2$ (Mantelfläche)

Berechen Sie die Höhe h_s der Seitenfläche und den Winkel ε.

Lösung:

Wie bei allen Körpern, deren Grundfläche mehr als vier Ecken hat, zeichnen wir nur noch einen Teil der Pyramide. Darin kommen alle wesentlichen Strecken der Pyramide vor.



Eine Seitenfläche ist $\frac{1}{5}$ der gesamten Mantelfläche. Daraus können wir h_s berechnen:

$$\frac{170}{5} = \frac{a \cdot h_s}{2} \Rightarrow \underline{h_s} = \frac{170 \cdot 2}{5 \cdot a} = \frac{170 \cdot 2}{5 \cdot 6{,}4} = \underline{\underline{10{,}6\ \text{cm}}}$$

Da das Fünfeck aus 5 gleichschenkligen Dreiecken besteht, wird der Mittelpunktswinkel in 5 gleiche Teile zu je 360°:5=72° geteilt. Da aber die Höhe h_Δ jedes Dreiecks diesen Teil noch einmal halbiert, bleiben noch 36° übrig.

$$\tan 36^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h_\Delta} \Rightarrow h_\Delta = \frac{\frac{a}{2}}{\tan 36^\circ} = \frac{3{,}2}{\tan 36^\circ} = 4{,}4\text{cm}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{h_\Delta}{h_s} = \frac{4{,}4}{10{,}6} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = 65{,}5^\circ}}$$

2004 Pflichtaufgabe 6:

Eine Kugel und ein Zylinder werden miteinander verglichen:

- **die Kugel hat das Volumen 268 cm³**
- **der Radius der Kugel und der Grundkreisradius des Zylinders sind gleich lang.**
- **Die Oberfläche der Kugel und die Mantelfläche des Zylinders sind gleich groß**

Berechnen Sie die Differenz der beiden Rauminhalte.

Lösung:

Wenn das Volumen einer Kugel gegeben ist, kann man sofort ihren Radius ausrechnen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{268 \cdot 3}{4 \cdot \pi}} = 4{,}0 \text{ cm} = r_{Zyl}$$

Oberfläche der Kugel: $O = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 4{,}0^2 = 201{,}0 \text{cm}^2 = M_{Zyl}$

Zylindermantel: $201{,}0 = 2\pi r h \Rightarrow h = \frac{201{,}0}{2 \cdot \pi \cdot 4{,}0} = 8{,}0 \text{ cm}$

Zylindervolumen: $V = \pi r^2 h = \pi 4{,}0^2 \cdot 8{,}0 = 402{,}0 \text{ cm}^3$

Volumendifferenz: $\underline{D =}\ 402 - 268 = \underline{134 \text{ cm}^3}$

2004 Pflichtaufgabe 7:

Corinna legt 4 500,00 € zu folgenden Zinssätzen auf drei Jahre an:

1. Jahr: 1,50%
2. Jahr: 2,25%
3. Jahr: 2,75%
Zinsen werden mitverzinst.

Hans legt ebenfalls 4 500,00 € auf drei Jahre an. Nach Ablauf des ersten Jahres erhält er 45,00 € Zinsen, nach Ablauf des zweiten Jahres 91,43 €.

Welchen Zinssatz muss seine Bank im dritten Jahr gewähren, damit er nach den drei Jahren das gleiche Guthaben wie Corinna hat?

Lösung:

Wenn die Zinsen mitverzinst werden gilt bei gleichbleibendem Zinssatz die Zinseszinsformel: $K_n = K_o \cdot q^n$. Dabei ist K_n das kapital nach n Jahren, K_o das Anfangskapital und q der Zinsfaktor.

Für q gilt: $q = 1 + \frac{p}{100}$

Wenn der Zinssatz jedoch wie hier ansteigt, wird aus q^n das Produkt der einzelnen q.

$p_1 = 1{,}5\% \Rightarrow q_1 = 1{,}015$
$p_2 = 2{,}25\% \Rightarrow q_2 = 1{,}0225$
$p_3 = 2{,}75\% \Rightarrow q_3 = 1{,}0275$

also :

$$K_3 = K_o \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 4500 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}0275 = 4798{,}70\ €$$

Bei Hans können wir die Zinsen jeweils addieren und erhalten dann das Kapital nach zwei Jahren:

$$K_2 = K_o + Z_1 + Z_2 = 4500 + 45 + 91{,}43 = 4636{,}43\ €$$

Um nun den Zinssatz für das 3. Jahr heraus zu bekommen, können wir wieder ebenfalls mit q rechnen und das angestrebte Endkapital durch das Kapital nach den zwei Jahren dividieren:

$$K_3 = K_2 \cdot q_3 \Rightarrow q_3 = \frac{K_3}{K_2} = \frac{4798{,}70}{4936{,}43} = 1{,}035 \Rightarrow \underline{p_3 = 3{,}5\%}$$

(Man kann natürlich auch die Zinsen ausrechnen: K_3-K_2, und dann über einen Dreisatz p_3 bestimmen)

2004 Pflichtaufgabe 8:

Eine Schule nutzt das nebenstehende Angebot und kauft fünf Druckerpatronen.

Vom Preis einschließlich 16% Mehrwertsteuer dürfen 2% Skonto abgezogen werden.

Es sind dann 205,20 € zu überweisen.

Wie hoch ist der Katalogpreis für eine Einzelpatrone ohne den Mengenrabatt?

Angebot

Bei Abnahme von mindestens 5 Druckerpatronen erhalten Sie 5% Rabatt!

Die Katalogpreise enthalten keine Mehrwertsteuer!

Lösung:

Auch diese Aufgabe lässt sich schnell mit dem Prozentfaktor q rechnen. Um den Endwert zu bekommen muss man nur den Grundwert mit q multiplizieren.

$$\text{Endwert} = \text{Grundwert} \cdot q \;\Rightarrow\; \text{Grundwert} = \frac{\text{Endwert}}{q}$$

Für q gilt dabei:

Bei einer prozentualen Zunahme ist $q = 1 + \frac{p}{100}$

Bei einer prozentualen Abnahme ist $q = 1 - \frac{p}{100}$

Also: Mehrwertsteuer: $p = 16\%$ $\Rightarrow q = 1 + \frac{16}{100} = 1{,}16$

Skonto: $p = 2\%$ $\Rightarrow q = 1 - \frac{2}{100} = 0{,}98$

Rabatt: $p = 5\%$ $\Rightarrow q = 1 - \frac{5}{100} = 0{,}95$

Rückwärts müssen wir nun vom zu überweisenden Preis zuerst den Rabatt herausrechnen, dann die Mehrwertsteuer:

Ohne Skonto: $\frac{205{,}20}{0{,}98} = 209{,}39\ €$

Ohne Mehrwertsteuer: $\frac{209{,}39}{1{,}16} = 180{,}51\ €$

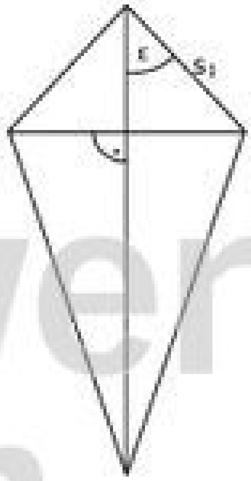
Ohne Rabatt: $\frac{180{,}51}{0{,}95} = 190{,}01\ €$

Katalogpreis der einzelnen Patrone: $\frac{190{,}01}{5} = \underline{\underline{38{,}00\ €}}$

2004 Wahlaufgabe 1.a:

Ein Körper besteht aus zwei quadratischen Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche.

Die Skizze zeigt den Diagonalschnitt des Körpers.



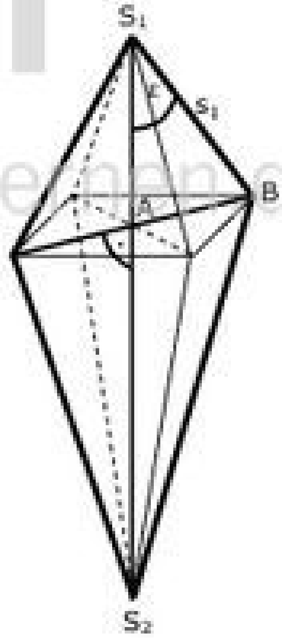
Gegeben sind:

s_1 = 12,4 cm
ε = 52,8°

Das Volumen der unteren Pyramide ist doppelt so groß wie das der oberen.
Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers.

Lösung:

Das wichtigste Wort dieser Aufgabe ist „Diagonalschnitt". Dies bedeutet nämlich, dass die waagrechte Strecke die Diagonale des Quadrats der Grundfläche ist!



Δ BAS_1:

$$\cos\varepsilon = \frac{\overline{S_1A}}{\overline{S_1B}} \Rightarrow \overline{S_1A} = \overline{S_1B}\cdot\cos\varepsilon = 12{,}4\cdot\cos 52{,}8^\circ = 7{,}5\text{ cm} = h_1$$

$$\sin\varepsilon = \frac{\overline{AB}}{\overline{S_1B}} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{S_1B}\cdot\sin\varepsilon = 12{,}4\cdot\sin 52{,}8^\circ = 9{,}9\text{ cm}$$

Ganze Diagonale: $d = 9{,}9\cdot 2 = 19{,}8\text{ cm} = a\cdot\sqrt{2}$

Quadratseite: $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{19{,}8}{\sqrt{2}} = 14{,}0\text{ cm}$

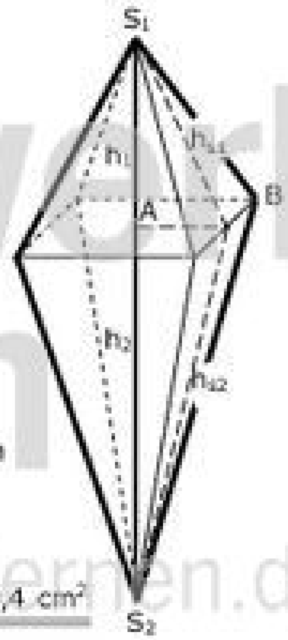
Für die Oberfläche des Körpers brauchen wir nun noch die beiden Höhen der Seitenflächen. Diese berechnen wir in den rechtwinkligen Dreiecken mit der Hypotenuse h_s und den Katheten h und a/2.

$$h_{s1}^2 = h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_{s1} = \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7{,}5^2 + 7^2} = 10{,}3\text{ cm}$$

h_{s2} bekommen wir über den Volumenzusammenhang:

$$V_2 = 2V_1 \Rightarrow\ 2\cdot\frac{1}{3}a^2h_1 = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 14^2\cdot 7{,}5 = 980\text{ cm}^3$$

$$980 = \frac{1}{3}a^2h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{980\cdot 3}{14^2} = 15{,}0\text{ cm} \Rightarrow h_{s2} = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 + 7^2} = 16{,}6\text{ cm}$$



Oberfläche:

$$\underline{\underline{O}} = M_1 + M_2 = 4\cdot\frac{a\cdot h_{s1}}{2} + 4\cdot\frac{a\cdot h_{s2}}{2} = 2\cdot a\cdot(h_{s1}+h_{s2}) = 2\cdot 14\cdot(10{,}3+16{,}6) = \underline{\underline{750{,}4\text{ cm}^2}}$$