MATHRIX

Mathe fit mit einem Klick!

DAS MATHE - ZK - BUCH

Alle Originalaufgaben Haupttermine Gruppe A und B
von 1997 – 2009

Ausführlich gerechnete und kommentierte Lösungswege der
Jahre 1998-2009
(1998-2000 nur Gruppe A)

Zusätzliche Hilfen zur Potenzrechnung, Logarithmen,
Exponentialgleichungen, Wachstum, Körperberechnung

$\sqrt{}$ x^2 π Σ

Von: Jochen Koppenhöfer und Pascal Christian

Inhaltsverzeichnis

Vorwort und allgemeine Infos

Die zentrale Klassenarbeit im Fach Mathematik müssen alle SchülerInnen der 10.Klasse am allgemeinbildenden Gymnasium in Baden-Württemberg schreiben.
Der Termin und die Aufgaben werden vom Kultusministerium Baden-Württemberg vorgegeben.
Dieses Buch enthält alle Originalaufgaben der Haupttermine 1997-2007, sowie ausführlich gerechnete und kommentierte Lösungen zu den Jahren 1998-2007.
Als Zusatzmaterial habe ich einige Grundlagen zum Rechnen mit Potenzen, Logarithmen, Wachstumsaufgaben und Körpern beigefügt.

Du bekommst Aufgaben aus allen 4 wichtigen Gebieten der Mathematik der 10.Jahrgangsstufe Gymnasium. Je eine aus dem Gebiet der:

Potenzen/Logarithmen/Funktionen
Körperberechnung (einschließlich Kreis)
Wachstum
Wahrscheinlichkeit

Zur Bearbeitung der Aufgaben bekommst Du 90 Minuten Zeit. Einige Taschenrechner-Modelle und Formelsammlungen sind als Hilfsmittel erlaubt.
Euer Lehrer erhält 2 Versionen, Gruppe A und Gruppe B, der zentralen Klassenarbeit, die sich allerdings nur geringfügig unterscheiden. Je nach Gruppe liegt der Schwerpunkt entweder auf dem Bereich des Wachstums, der Wahrscheinlichkeit oder der Körperberechnung. D.h. die entsprechende Aufgabe ist um einen zusätzlichen Teil erweitert.
In den Lösungswegen findet Ihr diesen Zusatz als „Zusatz-Teilaufgabe Gruppe A bzw. B" hervorgehoben.
Natürlich ist die Qualität des Inhalts und das korrekte Rechnen das Hauptkriterium für eine gute Note. Die äußere Form und sprachliche Darstellung sind aber deswegen nicht zu vernachlässigen, da sie Einfluss auf die Note haben.
Der Notenspiegel bei Prüfungen wird so angesetzt, dass die Hälfte aller erreichbaren Punkte die Note 4 ergibt.

Tipp zum Einsatz dieses Buches: Rechne zuerst 1 ZK zusammen mit den Lösungswegen durch. Mach Dir klar, welche Regeln und Formeln diesen Lösungen zugrunde liegen.
Rechne danach dann alle ZK's zuerst ohne Hilfe der Lösungswege und kontrolliere anschließend. Rechne **nicht** alle an einem Tag. Verteile die Aufgaben auf 1-2 Wochen.
Du wirst sehen, dass es Dir von ZK zu ZK leichter fällt und Du innerhalb der einzelnen Aufgaben weiter kommst.

Und natürlich am Morgen der Mathe-ZK gut frühstücken und etwas Traubenzucker, sowie Wasser mit in die Prüfung nehmen.

Viel Erfolg und gutes Gelingen wünschen Euch

Jochen Koppenhöfer und Pascal Christian

Originalprüfung Haupttermin Mathematik ZK Baden-Württemberg 2007 Gruppe A und B

1.Aufgabe (8Punkte)

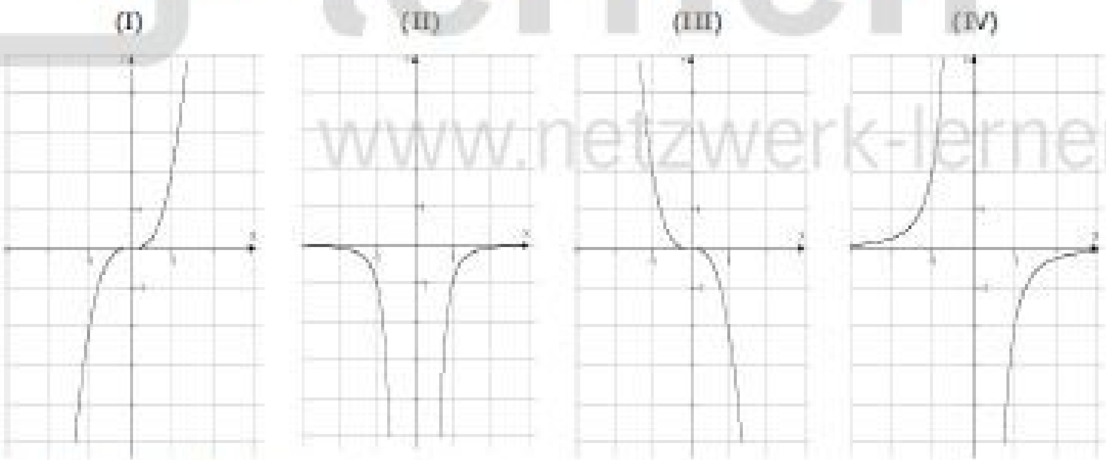
a) Vereinfache so weit wie möglich $\frac{5^{x+2}+2\cdot 5^{x}}{2\cdot 5^{x}-5^{x+1}}$

b) Löse die Gleichung $7^{x-3}-49^{x}=0$

c) Die 4 Bilder zeigen Schaubilder von Potenzfunktionen.
Ordne die Funktionen mit den Gleichungen

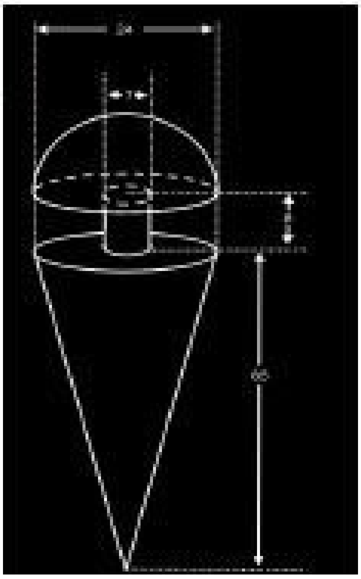
(1) $f(x)=-x^{-4}$ (2) $g(x)=2x^{3}$

jeweils einem Schaubild zu.
Gib für die übrigen Schaubilder jeweils einen möglichen Funktionsterm an.



2.Aufgabe (8Punkte)

Der abgebildete Flaschenverschluss ist zusammengesetzt aus einem Kreiskegel, einem Kreiszylinder und einer Halbkugel (siehe Abbildung; Maße in Millimeter).



a) Der Flaschenverschluss ist aus Stahl hergestellt.
Berechne das Gewicht des Flaschenverschlusses, wenn $1\,cm^3$ Stahl 7,9 g wiegt.

b) Wie tief steckt der Verschluss in einem Flaschenhals mit dem Innendurchmesser 18mm?
Welchen Flächeninhalt hat der Teil des Kegelmantels, der sich dann innerhalb der Flasche befindet?

3.Aufgabe (A:8Punkte/B:12Punkte)

Ein Würfel wurde so präpariert, dass die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 und die Augenzahl 6 mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 auftritt.
Die Augenzahlen 2,3,4 und 5 treten jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

a) Der Würfel wird einmal geworfen.
Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augenzahlen an.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Augenzahl zu erhalten?

b) Nun wird der Würfel dreimal geworfen.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Man erhält nur Sechsen.

B: Man erhält immer die gleiche Augenzahl.

C: Man erhält genau eine Sechs.

c) Zusatz-Teilaufgabe der Gruppe B

Bei einer Serie von n Würfen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens eine Eins auftreten. Wie groß muss n mindestens sein?

4.Aufgabe (A:12Punkte/B:8Punkte)

Zu Beginn des Jahres 1960 hatte die Stadt Rechenhausen 30000 Einwohner, zu Beginn des Jahres 2005 waren es 50500.
Zu Beginn des Jahres 1960 hatte die Stadt Lesewinkel 40000 Einwohner. Ihre Einwohnerzahl nahm seither infolge des Wegzugs der jungen Bevölkerung jährlich um 1% ab.

a) Um welchen Prozentsatz nahm die Einwohnerzahl von Rechenhausen jährlich zu, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt?
In welchem Jahr konnten die Rechenhausener den 40000-ten Einwohner feiern?

b) In welchem Jahr hatten beide Städte gleich viele Einwohner?

c) Zusatz-Teilaufgabe der Gruppe A

Im Rechenhausener Stadtteil „Weststadt" (1000 Einwohner) verbreitet sich derzeit ein Gerücht. Am Anfang kannten 2 Einwohner das Gerücht, eine Stunde später wussten bereits 2 weitere Einwohner davon. Man kann bei diesem Vorgang von logistischem Wachstum der Form

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot \left(S - B(t)\right)$$

ausgehen.
Wie viele Einwohner kannten das Gerücht demnach nach 3 Stunden?
In der wievielten Stunde lag der stündliche Zuwachs erstmals über 15 Personen?

ZK Haupttermin 2007 Lösung

Aufgabe 1

a)

$$\frac{5^{x+2}+2\cdot 5^x}{2\cdot 5^x-5^{x+1}}=\frac{5^x(5^2+2)}{5^x(2-5^1)}=\frac{27}{-3}=-9$$

b)

Hier verteilt man einfach die Terme auf beide Seiten des Gleichheitszeichens.

Wenn man jetzt noch erkennt, dass $49=7^2$ ist... perfekt:

$7^{x-3}-49^x=0\rightarrow 7^{x-3}=49^x\rightarrow 7^{x-3}=7^{2x}$ **jetzt 10er-log anwenden:**

$\log 7^{x-3}=\log 7^{2x}$ **mit Hilfe des 3.log. Gesetzes:** $(x-3)\log 7=2x\log 7$

$\rightarrow$ **log7 kann man kürzen: x-3=2x** $\rightarrow$ x=-3

c)

Funktion (1) kann man dem Schaubild (II) zuordnen, da

1. negative Hochzahl; deswegen Hyperbel als Schaubild.
2. gerade Hochzahl; deswegen ist Schaubild achsensymmetrisch zur y-Achse.
3. negativer Vorfaktor vor dem x-Term; deswegen liegt Schaubild unterhalb der x-Achse.

Funktion (2) kann man dem Schaubild (I) zuordnen, da

1. positive Hochzahl; deswegen ganzrationales Schaubild („parabelförmig" ohne Definitionslücken).
2. ungerade Hochzahl; deswegen punktsymmetrisch zum Ursprung.
3. positiver Vorfaktor; deswegen negative Funktionswerte auf negativem Teil der x-Achse
4. und positive Funktionswerte auf positivem Teil der x-Achse.

Mögliche Funktionsterme für (III) und (IV):

Für (III): $h(x)=-2x^3$ **Für (IV):** $k(x)=-2x^{-3}$

Aufgabe 2

a)

Über das Volumen erhält man das Gewicht. Man errechnet eben nacheinander die einzelnen Volumina und addiert sie anschließend. Aus der Abbildung entnimmt man die Maße:

$$V_{Kreiskegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot (12mm)^2 \cdot 65mm = 3120\pi mm^3$$

$$V_{Kreiszylinder} = \pi r^2 h \rightarrow \pi \cdot (3{,}5mm)^2 \cdot 8mm = 98\pi mm^3$$

$$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot(12mm)^3 = 1152\pi mm^3$$

$$V_{Flaschenverschluss} = V_{Kreiskegel} + V_{Kreiszylinder} + V_{Halbkugel} = (3120\pi + 98\pi + 1152\pi)mm^3 = 13729\ mm^3$$

Der Umrechnungsfaktor von mm^3 in cm^3 beträgt 1000:1.

Also sind $13729 mm^3 = 13{,}729 cm^3$.

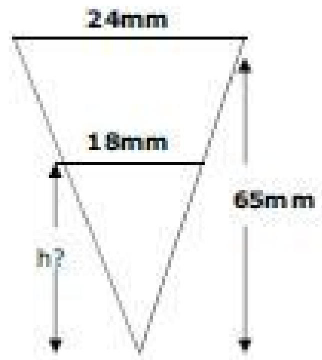
Gewicht des Verschlusses: $13{,}729 cm^3 \cdot 7{,}9\frac{g}{cm^3}$ = 108,46 g.

b)

Mit anderen Worten: Wo hat der Kreiskegel einen Durchmesser von 18mm?

Diese Frage kann man sehr gut mit dem Strahlensatz beantworten.

Skizze des Kreiskegels dazu:

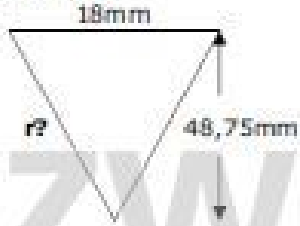


2. Strahlensatz: $\frac{18mm}{24mm} = \frac{h}{65mm} \rightarrow h = \frac{18}{24}\cdot 65mm \rightarrow h =$ **48,75mm** tief steckt der Verschluss im Flaschenhals.

Kegelmantel:

Rollt man einen Kegel ab, dann erhält man einen Kreisausschnitt.

Folgende Maße des kleinen Kegels sind bekannt:



Die Fläche des Kreisausschnitts kann man zu $A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot r$ errechnen:

r: mit dem Satz des Pythagoras $r^2=(48{,}75mm)^2+(9mm)^2 \rightarrow$

$r=\sqrt{2457{,}56} \rightarrow r=49{,}57mm$

b: b, der Kreisbogen, ist bei einem Kegel der Umfang des Grundkreises.

$b=U=2\cdot\pi\cdot 9mm=56{,}55mm$

Damit folgt für die Fläche: $A=\frac{1}{2}\cdot 56{,}55mm\cdot 49{,}57mm=\mathbf{1401{,}6}\ mm^2$

Aufgabe 3
a)

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt immer 1. Auf die Augenzahlen 2,3,4 und 5 entfällt die Summe von 1-(0,1+0,3)=0,6.
Teilt man dies durch 4, da es ja 4 Zahlen sind, erhält man p=0,15:

Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X=Augenzahl	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P(X)	**0,3**	**0,15**	**0,15**	**0,15**	**0,15**	**0,1**

Ereignis D: „Gerade AZ"; Ergebnismenge von D={2;4;6}

P(D)= 0,15+0,15+0,1=**0,4**

b)
$P(A)=(0{,}1)^3=\mathbf{0{,}001}$

$P(B)=(0{,}3)^3+4\cdot(0{,}15)^3+(0{,}1)^3=0{,}027+0{,}0135+0{,}001=\mathbf{0{,}0415}$

$P(C)=0{,}1\cdot 0{,}9^2\cdot 3=\mathbf{0{,}243}$

c) Zusatz-Teilaufgabe Gruppe B

Diese Art von Aufgaben sind sehr oft so konstruiert, dass man mit dem Gegenereignis rechnen sollte:

$(1-0{,}3)^n=0{,}01\rightarrow(0{,}7)^n=0{,}01$ 10er-log anwenden: $\log(0{,}7)^n=\log 0{,}01\rightarrow$

mit dem 3.log-Gesetz: $n\cdot\log 0{,}7=\log 0{,}01\rightarrow n=\frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}7}=\mathbf{12{,}91}$

d.h. ab dem 13.Wurf tritt diese Wahrscheinlichkeit ein.

Aufgabe 4
a)

Das allgemein exponentielle Wachstum genügt folgender Funktion:

$B(t) = B(0) \cdot a^t$

Das Jahr 1960 wird als t=0 betrachtet $\rightarrow B(0) = 30000$ Einwohner.
Daraus folgt, dass $B(45) = 50500$ Einwohner.

Diese Angaben in die Wachstumsfunktion: $50500 = 30000 \cdot a^{45} \rightarrow a = \sqrt[45]{\frac{50500}{30000}} = 1{,}01164$

Aus den Nachkommastellen des Wachstumsfaktors lässt sich die prozentuale Zunahme ablesen:

Prozentuale jährliche Zunahme: 1,164 %.

40000ster Einwohner?

$$40000 = 30000 \cdot 1{,}01164^t \rightarrow 1{,}01164^t = \frac{40000}{30000} \rightarrow 1{,}01164^t = \frac{4}{3} \rightarrow$$

mit 10er-log: $\log 1{,}01164^t = \frac{4}{3} \rightarrow t \cdot \log 1{,}01164 = \log\frac{4}{3} \rightarrow t = \frac{\log\frac{4}{3}}{\log 1{,}01164} =$ **24,86 Jahre.**

D.h. im Jahr 1960+25 Jahre=1985 konnten die Rechenhausener Ihren 40000sten Einwohner feiern.

b)
Einwohnerzahl von Rechenhausen: $B(t) = 30000 \cdot 1{,}01164^t$

Einwohnerzahl von Lesewinkel: $G(t) = 40000 \cdot 0{,}99^t$
(bei einer Abnahme bzw. Zerfall, wird von der Zahl 1 der entsprechende Bruchteil abgezogen.

Dies ergibt dann den Wachstumsfaktor a. Hier eben 0,99.).

Gleich viele Einwohner haben beide Städte dann, wenn B(t)=G(t):

$$30000 \cdot 1{,}01164^t = 40000 \cdot 0{,}99^t \rightarrow \left(\frac{1{,}01164}{0{,}99}\right)^t = \frac{40000}{30000} \rightarrow (1{,}02186)^t = \frac{4}{3} \rightarrow$$

mit dem 10er-log: $t \cdot \log 1{,}02186 = \log\frac{4}{3} \rightarrow t = \frac{\log\frac{4}{3}}{\log 1{,}02186} =$ **13,3 Jahre.**

Also im Jahr 1973-1974 hatten beide Städte gleich viel Einwohner.