Vorwort

Dieses Skript soll euch helfen, die Konzepte und Verfahren der Analysis besser verstehen zu können. Wir werden euch Mittel und Wege zeigen, wie man spezifische Aufgabenstellungen lösen kann. Diese Aufgabenstellungen bilden dann später die Grundlage für komplexe Abi-Aufgaben. Deshalb legen wir euch nahe, die Kapitel Stück für Stück durchzuarbeiten und euch mit den Grundlagen vertraut zu machen. Rechnet am besten jedes Beispiel, das wir euch zeigen, einmal selber durch. Natürlich kann man die Problemstellungen auch anders lösen, aber wir glauben, dass es mit den hier vorgestellten Verfahren am einfachsten und schnellsten geht.

Die Ausrede: „Ich kapier die Aufgabe nicht!" lassen wir nicht mehr gelten. Unsere Verfahren sin so ausgelegt, dass man sie auswendig lernen kann. Es ist also nicht mehr eine Frage des Verständnisses, sondern eine Frage des Fleißes. Wenn ihr mit diesem Skript intensiv arbeitet, werdet ihr merken, dass sich alles, was ihr in der Analyis kennenlernen werdet, auf ein paar Grundlagen reduzieren lässt.

Unser Appell an euch ist: Arbeitet hart und fleißig. Und wer weiß, vielleicht wird die/der eine oder andere unter euch ihren/seinen Gefallen an der Mathematik finden. Wir wünschen euch auf jeden Fall viel Erfolg und Spaß mit diesem Buch.

II.1 Allgemeines

In der Analysis wird vorwiegend über Funktionen und deren geometrische Eigenschaften gesprochen und diskutiert. Was wir euch in diesem Kapitel vermitteln wollen ist zunächst einmal einfach gesagt: *Was ist eine Funktion überhaupt und wie kann ich ihre Eigenschaften ausnutzen?*

Was ihr bisher in den letzten zehn bzw. elf Jahren Mathematik gelernt habt, ist das Lösen von Gleichungen, das Umstellen von Termen und einige Grundlagen innerhalb der eigentlichen Analysis, also der Funktionsuntersuchung. Die wirkliche Schwierigkeit der Analysis besteht nicht darin, die Funktionsuntersuchung zu verstehen und die mathematischen Eigenschaften der Funktionen damit zu verbinden, sondern vielmehr, alles was ihr in den letzten zehn bzw. elf Jahren gelernt habt mit den Theorien über Funktionen und dem eigentlichen Lösen der Aufgaben zu verbinden.

In diesem Kapitel möchten wir euch die Prinzipien der Analysis näher bringen. Dazu werden wir zunächst alle Eigenschaften, die ein Schaubild einer Funktion haben kann, allgemein beschreiben. Die Eigenschaften von Schaubildern werden wir ab sofort als *geometrische Eigenschaft einer Funktion* bezeichnen. Dann werden wir auf spezielle Funktionsarten eingehen, die ihr in der Oberstufe besprechen werdet. Auch bei der Besprechung des jeweiligen Funktionstypen werden wir wiederum die geometrischen Eigenschaften besprechen. Weiterhin werden wir auf die Besonderheiten des jeweiligen Funktionstypen eingehen.

Jedes Prinzip, das wir besprechen, werden wir euch mit einigen Beispielrechnungen näher bringen. Hierbei solltet ihr darauf achten, dass ihr jeden Schritt, den wir euch zeigen, nachvollziehen könnt. Ein Beispiel ist nur dann sinnvoll, wenn ihr es soweit verstanden habt, dass ihr es selbstständig nachrechnen könnt. Selbstständig bedeutet hier: Aufgabe nochmal durchrechnen, OHNE IM BESIPIEL NACHZUSCHAUEN. Wir werden euch am Ende eines jeden Abschnitts Übungsaufgaben präsentieren, die es gilt zu lösen. Natürlich geben wir euch auch die Lösung, damit ihr prüfen könnt, ob ihr alles richtig gemacht habt. Natürlich gilt hier, erst rechnen, dann in der Lösung nachschlagen.

Ziel von unserem Skript ist es, euch Lösungskonzepte zu liefern, mit denen ihr an Aufgaben herangehen könnt. Um mit diesen Lösungskonzepten jedoch richtig arbeiten zu können, müsst ihr lernen mit diesen umzugehen. Und das bedeutet: *üben, üben, üben*...

Bitte nehmt zur Kenntnis, dass wir euch in diesem Skript Verfahren und Lösungsprinzipien mitteilen, die nicht immer in der Schule gelehrt werden. Das jeweilige Verfahren, das wir euch zeigen werden, haben wir deshalb ausgesucht, weil wir es am einfachsten und schnellsten finden. Nicht jeder Lehrer ist immer davon begeistert und deshalb gibt es zu jedem Verfahren natürlich auch noch die (in unseren Augen) etwas umständlichere Schulmethode dazu. Ihr habt also die freie Auswahl. Oder besser gesagt, nehmt das, was euch euer Lehrer als richtig in der Arbeit durchgehen lässt, denn er gibt die Noten und nicht wir.

Vielleicht lässt sich dieses Skript auch gut mit einer Schreinerlehre vergleichen. Wir zeigen euch wie ihr mit Säge, Hobel und Bohrer umzugehen habt, den Tisch bauen müsst ihr aber immer noch selbst. Wie gut ihr mit eurem Werkzeug umgehen könnt, hängt davon ab, wie sehr ihr euch damit beschäftigt. Euer Lehrer nimmt euch dann die Gesellenprüfung ab und entscheidet, wie gut ihr darin geworden seid.

Beispiel (EggTech):

Schauen wir uns hierzu ein kleines Beispiel an. Nehmen wir an ihr hättet euer Abitur erfolgreich hinter euch gebracht und seid nun Chef einer großen Eierbecherfirma namens EggTech. Euer Produktionsleiter gibt euch eine Kostenfunktion K in Abhängigkeit der produzierten Menge x (gemessen in produzierten Eierbechern) mit: $K(x) = 0{,}005 \cdot x^3$. Euer Verkaufsleiter schlägt euch vor, eure Luxus-Eierbecher für 25€ zu verkaufen. Eure Aufgabe ist es nun, die Produktionsmenge x so festzulegen, dass der Gewinn eurer Firma möglichst groß wird.

(1) Funktionsfindung

Als erstes müsst ihr also eine Funktion finden, die euer Problem beschreibt bzw. die Größe beschreibt mit der ihr arbeiten wollt. Das ist bei euch der Gewinn. Der Gewinn berechnet sich (wie jeder hoffentlich weiß) aus Einnahmen minus Kosten. Die Einnahmen lassen sich durch die Funktion E beschreiben, mit $E(x) = 25 \cdot x$. Damit ergibt sich für den Gewinn G: $G(x) = E(x) - K(x) = 25x - 0{,}005x^3$.

(2) geometr. Eigenschaft

Ihr habt jetzt eure Zielfunktion gefunden, jetzt müsst ihr nur noch überlegen, welche geometrische Eigenschaft ihr bestimmen müsst, um euer Problem zu lösen. Da eure Aufgabe ist, den Gewinn möglichst groß zu machen, benötigt ihr den x-Wert, bei dem eure Funktion am größten ist. Das ist – wie ihr hoffentlich schon wisst – der Hochpunkt der Funktion.

(3) Gleichung finden

Die geometrische Eigenschaft ist nun gefunden, jetzt muss sie nur noch in eine Gleichung umgeformt werden. Auch das dürfte kein Problem darstellen, ihr wisst ja bereits, dass für einen Hochpunkt gilt: $G'(x) = 0$.

(4) Gleichung lösen

Damit ergibt sich die Gleichung: $-0.015x^2 + 25 = 0$. Diese muss dann nur noch gelöst werden, wir befinden uns also nun nicht mehr direkt bei Funktionen, sondern dem Lösen von Gleichungen. Die Lösung ist: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5000}{3}} \approx \pm 40{,}84$.

(5) Lösung interpretieren

Diese muss jetzt noch interpretiert werden. Das macht ihr mit Hilfe der zweiten Ableitung. Ihr benötigt ja nur den Hochpunkt also muss die zweite Ableitung negativ sein. Dies ist der Fall bei $x = 40{,}84$. Den größten Gewinn erhaltet ihr also bei einer Produktion von 40,84. Da ihr nur ganze Eierbecher produzieren könnt, entscheidet ihr euch also entweder für eine Produktion von 40 oder 41 Eierbechern.

Geometrische Eigenschaften:

Unter geometrischen Eigenschaften einer Funktion verstehen wir die Eigenschaften, die ein Schaubild einer Funktion haben kann. Dabei unterscheiden wir bei einem Schaubild zwischen drei Grundarten von Eigenschaften. Das sind die *Position*, die *Steigung* und die *Fläche* zwischen Schaubild und x-Achse.

- Die **Position** eines Schaubildes wird definiert durch die Punkte die auf dem Schaubild liegen. Ein Punkt hat jeweils einen x- und einen y-Wert. Das Schaubild einer Funktion ist so definiert, dass auf ihm nur Punkte liegen, deren y-Wert dadurch entsteht, dass ihr x-Wert durch die Funktion abgebildet wird.

- Die **Steigung** eines Schaubildes ist jeweils nur an einem Punkt definiert. Nur wenn wir einen gegeben x-Wert haben, können wir die Steigung des Schaubildes ausrechnen. Dabei ist die Steigung des Schaubildes genau gleich der Steigung der Tangente, die an das Schaubild im besagten Punkt angelegt wird. Den Wert der Steigung erhaltet ihr nun durch einsetzen des x-Wertes des Punktes in die Ableitung der Funktion.

- Die Fläche zwischen einem Schaubild und der x-Achse wird durch ein Intervall definiert. Die Fläche rechnet ihr aus, indem ihr das Intervall (also vielmehr seine Grenzen) in die Stammfunktion der Funktion einsetzt. Falls euch das zu schnell ging, einfach mal bei Abschnitt II.1.44 auf Seite 120 vorbeischauen.

All das haben wir nochmal in einer kleinen Grafik zusammengefasst (vgl. Abbildung 2). Dabei könnt ihr erkennen, dass die zentrale Größe einer jeden Aufgabe der x-Wert ist. Es wird also immer euer erstes Bestreben sein, den x-Wert zu berechnen. So lange ihr den x-Wert nicht habt, könnt ihr den Rest der Aufgabe nicht ausrechnen.

Wenn ihr eine *Positionsangabe* habt, bzw. eine Position berechnen wollt (z. B. Nullstellen, Schnittpunkte), dann nehmt ihr immer die Funktion selbst. Diese bildet den x-Wert immer auf den zugehörigen y-Wert ab. Dabei ist zu beachten, dass es bei jeder Funktion zwei Richtungen gibt. Die eine ist die *Funktionsrichtung*. Bildet ihr in Funktionsrichtung ab, so ist das immer einfach. Ihr müsst nur den x-Wert in die Funktion einsetzen und den entstehenden Term ausrechnen. Bildet ihr entgegengesetzt der Funktionsrichtung ab, also in *inverser Richtung*, so müsst ihr immer eine Gleichung lösen.

Betrachtet ihr bei einer Berechnung die Steigung (z. B. Extrempunkte, Tangenten) so benutzt ihr die Ableitung der Funktion. Auch hier gibt es wieder die beiden Richtungen der Funktion. Ihr könnt an dem Bild auch erkennen, das der x-Wert das verbindende Teil zwischen Position und Steigung ist. Benötigt ihr z. B. einen Extrempunkt, so wisst ihr zunächst nur, dass die Ableitung an dieser Stelle 0 sein muss. Dann könnt ihr mit der inversen Funktionsrichtung den x-Wert berechnen und damit dann den y-Wert.

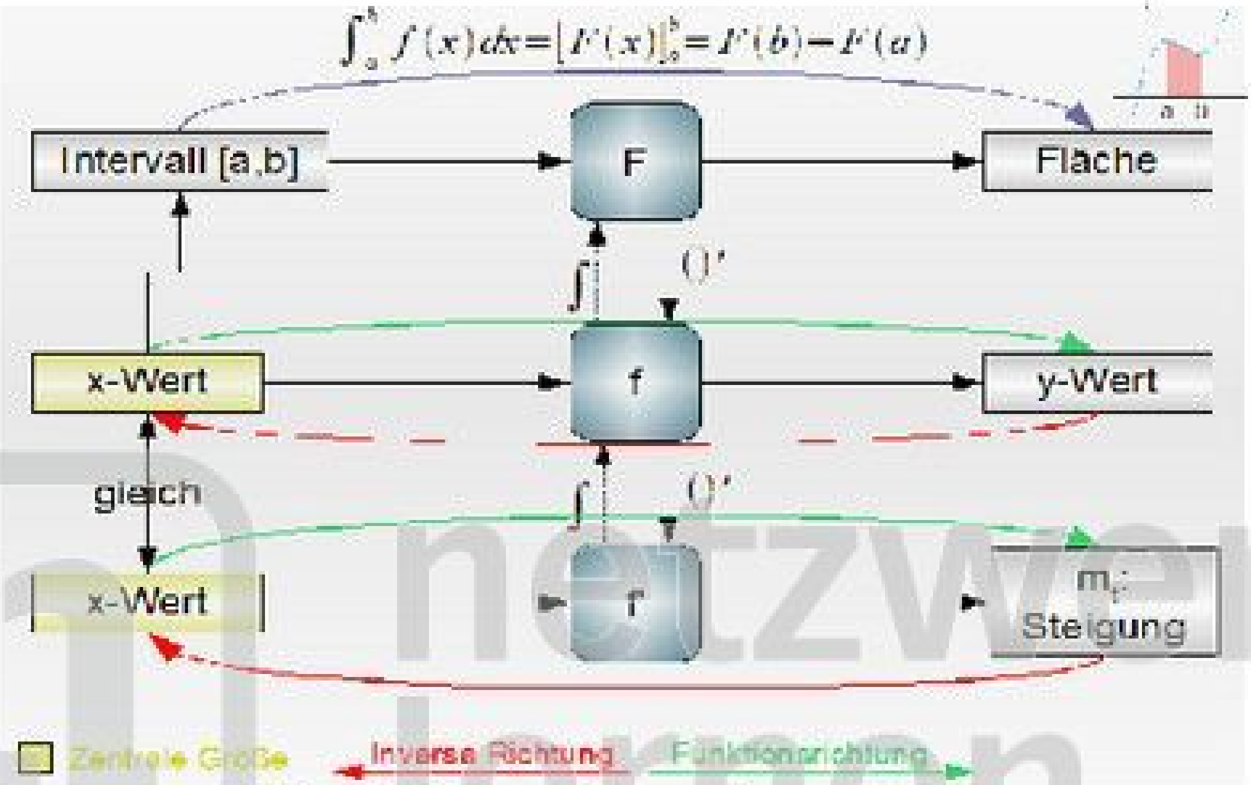

Abbildung 2: Abbildungsrichtungen und geometrische Größen

Um die Fläche zwischen dem Schaubild einer Funktion und der x-Achse zu berechnen, benötigt ihr zunächst ein Intervall in dem die Fläche liegt. Das Intervall legt ihr dann einfach mit zwei x-Werten fest. Um die Fläche dann zu berechnen braucht ihr nur noch die Stammfunktion zu bilden.

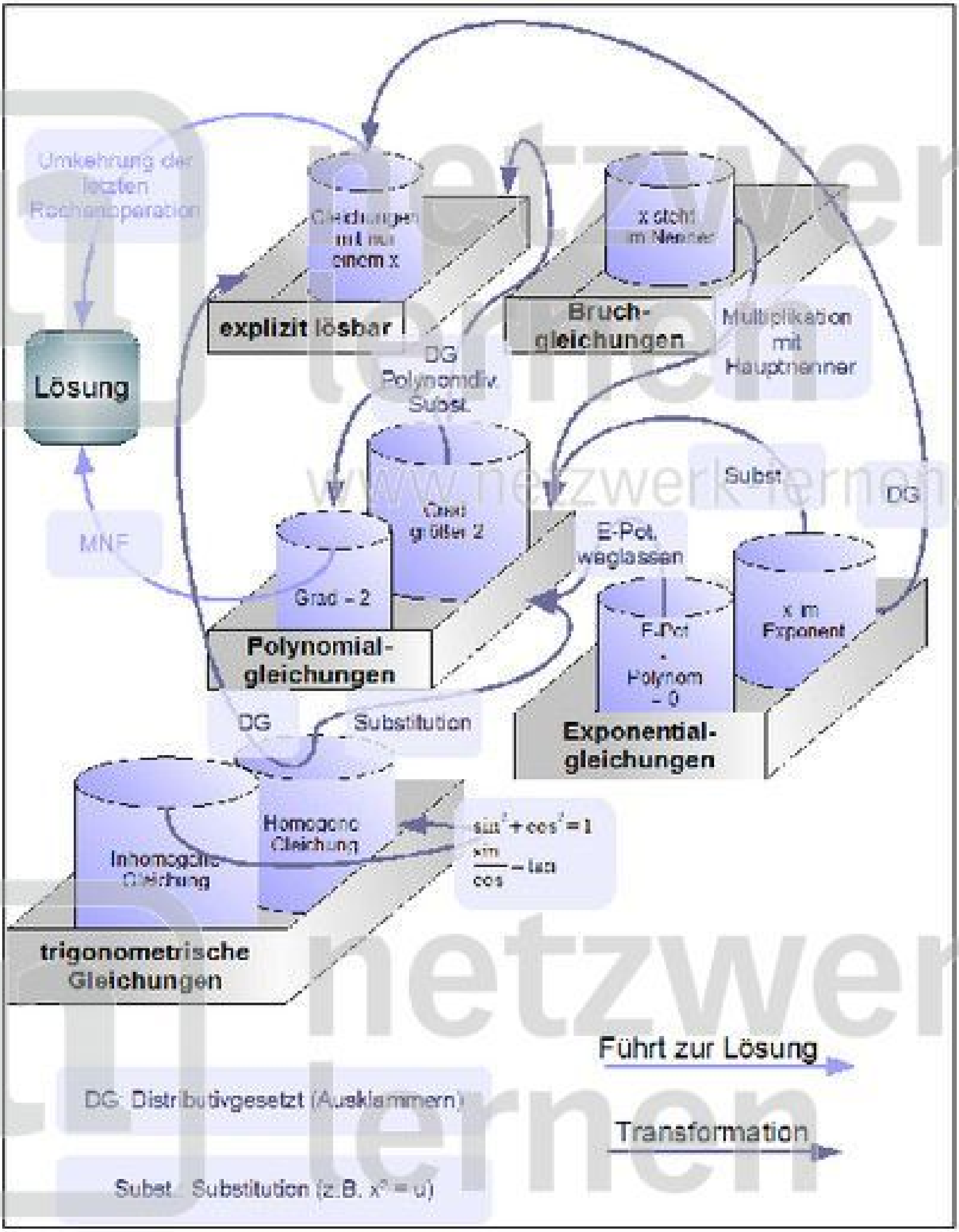

Abbildung 5: Prinzip vom Lösen einer Gleichung