Allgemeines zur Potenzrechnung (Gymnasium)

Genauso wie die Multiplikation eine Kurzschreibweise der Addition ist, ist die Darstellung
von Potenzen eine Kurzschreibweise der Multiplikation.

Beispiel:

$5\cdot5\cdot5=5^3$. **Die Hochzahl (der Exponent) gibt an, wie oft die Grundzahl (die Basis), hier die Zahl 5, miteinander multipliziert wird.**
Dabei bezeichnet man die 5 als Basis **oder** Grundzahl **und die 3 als** Hochzahl **oder auch** Exponent:

$\text{Grundzahl}^{\text{Hochzahl}}$ **bzw.** $\text{Basis}^{\text{Exponent}}$ **also** 5^3 **Exponent**

Basis

Steht man bei mehreren Rechenzeichen vor der Entscheidung was man zuerst rechnen muss, dann folgt aus der oberen Darstellung, dass zuerst die Potenzen dran sind. Dann erst darf multipliziert werden und zum Schluss wird dann addiert oder subtrahiert. Was in Klammern steht, wird immer zuerst berechnet. Dies ist die Hierarchie der Mathematik.

Beispiel ohne Klammer: $5+2\cdot3^3 \rightarrow$ **Also zuerst ist die Potenz dran:**
$3^3=3\cdot3\cdot3=27$,
dann die Multiplikation mit $2 \rightarrow 2\cdot27=54$;
zum Schluss die Addition mit $5 \rightarrow 5+54=59$.

Beispiel mit Klammer: $(5+2)\cdot3^3$.
Jetzt ist zuerst die Klammer dran, dann wird multipliziert: $7\cdot3^3=7\cdot27=189$

Falsch und echt grausam ist Folgendes:

$5+2\cdot3^3 \neq 5+6^3=5+216=221$. **Das richtige Ergebnis haben wir ja schon oben besprochen („Beispiel ohne Klammer"; Ergebnis 59). Der Unterschied im Ergebnis kann also enorm abweichen.**

MATHRIX

Die Potenzgesetze

Wenden wir uns nun den Gesetzen zu:

Das Kapitel Potenzen wird in Schulbüchern immer in verschiedene Unterkapitel gegliedert. Die Unterteilung wird aufgrund der verschiedenen Hochzahlen vorgenommen. Aber keine Angst, es gelten immer die gleichen Gesetze, egal ob ganze Zahlen, Bruchzahlen, rationale - und irrationale Zahlen oder Parameter als Exponenten auftreten.

Gesetze:

Wie immer in der Mathematik stehen die Gesetze allgemeingültig da.
Nach jedem Gesetz findet Ihr 2 Beispiele. Zum Warmrechnen.
Etwas heißer wird es dann mit den Beispielen nach den Gesetzen.

1. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ Bei Multiplikation gleicher Basen werden die Hochzahlen addiert.

Beispiele: a) $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$

b) $k^{2t} \cdot k^{-5t} = k^{2t+(-5t)} = k^{-3t}$

c) $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}} = x^{\frac{8}{4}} = x^2$

2. $a^n \div a^k = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ Bei Division gleicher Basen werden die Hochzahlen subtrahiert.

Beispiele: a) $4^5 \div 4^3 = \frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$

b) $k^{2t} : k^{-3t} = k^{2t-(-3t)} = k^{5t}$

c) $x^{\frac{7}{3}} : x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{7}{3}-\frac{4}{3}} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$

3. $\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$ Treffen 2 Hochzahlen direkt aufeinander (die Hochzahl k potenziert die Zahl a^n), dann werden die Hochzahlen miteinander multipliziert.

Beispiele: a) $\left(4^3\right)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$

b) $\left(k^{3t}\right)^n = k^{3tn}$

c) $\left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{10}{3}} = x^{\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3}} = x^{\frac{10}{5}} = x^2$

4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Werden 2 unterschiedliche Basen mit gleichen Hochzahlen multipliziert, so darf man beide Basen unter der gleichen Hochzahl zusammenfassen.

Bsp.: a) $4^3 \cdot 6^3 = (4 \cdot 6)^3 = 24^3$

b) $r^4 \cdot i^4 \cdot t^4 = (r \cdot i \cdot t)^4 = rit^4$

So, das war es schon im Prinzip. Jetzt solltet ihr noch folgende Umformungen kennen, damit ihr losrechnen könnt. Der Rest liegt bei Euch. Üben, üben, üben.

Umformungen

1. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ bzw. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ bzw. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ etc.

Das heißt also, dass jede negative Hochzahl auch als Kehrbruch geschrieben werden darf. **Das negative Vorzeichen des Exponenten bewirkt eine Kehrbruchsituation.**

2. $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$; etc.

Das heißt, dass **Wurzeln immer als Bruch-Hochzahlen** dargestellt werden können. **Die Zahl im Nenner repräsentiert die Wurzel; die Zahl des Zählers stellt die Potenz dar.**

Beispiele: a) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{(a^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$

b) $k^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k^4}}$

3. $a^0 = 1$ und $a^1 = a$

Beispiele: a) $267895609^0 = 1$

b) $9^1 = 9$

Die oben beschriebenen Umformungen geraten allzu leicht in Vergessenheit, sind aber für Dein weiteres Schulleben in der Oberstufe im Fach Mathematik wichtig.
Mithilfe der folgenden Aufgabe kannst Du Dein Verständnis für die Umformungen trainieren und feststellen wie fit Du momentan schon bist.
Yes, you can...

Aufwärmübung zum Thema Umformen

Ordne den Termen (links) die entsprechenden Lösungen (rechts) zu. Zu jedem Term hast Du 3 Lösungsmöglichkeiten zur Auswahl:

1. $\sqrt[4]{3^2}$ a) $3^{\frac{3}{8}}$ b) $\sqrt{3}$ c) $3^{\frac{1}{4}}$

2. $\sqrt[6]{2^3}$ a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $2^{\frac{6}{3}}$

3. $\sqrt[12]{5^4}$ a) $\sqrt[3]{5}$ b) 5^3 c) $5^{\frac{3}{4}}$

4. $\sqrt[8]{x^4}$ a) x^2 b) x^8 c) $\sqrt{x}$

5. $\left(\frac{1}{k^t}\right)^{-2}$ a) k^{-2t} b) $k^{\frac{2}{t}}$ c) k^{2t}

6. $\sqrt[9]{t^6}$ a) $t^{\frac{3}{2}}$ b) $\sqrt[3]{t^2}$ c) $-\sqrt[3]{t^2}$

Lösungen: 1.b); 2.a); 3.a); 4.c); 5.c); 6.b)

MATHRIX

Komplexere Aufgaben (Lösungen und Lösungswege siehe nächste Seite)
Fasse mithilfe Deines Wissens über die Potenzgesetze zusammen.

1. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[3]{128} \div \sqrt[3]{2}$

Tipp: Fürs Rechnen mit Bruch-Hochzahlen musst Du fit im Bruchrechnen sein. Bist Du es?

> **Der BesserWisser-Kasten: Bruchrechnung**
>
> Bei **Addition** und **Subtraktion** Brüche gleichnamig machen (auf gleichen Nenner bringen), dann Zähler addieren, Nenner beibehalten.
>
> Beispiel $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4\cdot 2}{4\cdot 3}+\frac{3\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$
>
> Bei **Multiplikation** einfach Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.
>
> Beispiel $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$
>
> Bei **Division** wird mit dem Kehrwert des Nennerbruches eine Multiplikation durchgeführt.
>
> Beispiel $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{20}$

3. $\sqrt[4]{x^2} \div \sqrt[4]{x}$

4. $\sqrt{a} \cdot \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$

5. $\left(\sqrt{d} \cdot \sqrt[3]{d}\right)^2$

6. $\sqrt[4]{c^3} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt[4]{c^3}$

7. $\sqrt[4]{\sqrt{a^3}} \cdot \sqrt{a}$

Und noch das Allerletzte: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right)$

Lösungen und Lösungswege

1. $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3} = 9^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{2\cdot\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

2. $\sqrt[3]{128} \div \sqrt[3]{2} = 128^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{128}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{3}} = 4^{3\cdot\frac{1}{3}} = 4^1 = 4$

3. $\sqrt[4]{x^2} \div \sqrt[4]{x} = \left(\frac{x^2}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

4. $\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7}$

5. $\left(\sqrt{d}\cdot\sqrt[3]{d}\right)^2 = \left(d^{\frac{1}{2}}\cdot d^{\frac{1}{3}}\right)^2 = d^{2\cdot\frac{1}{2}}\cdot d^{2\cdot\frac{1}{3}} = d^1\cdot d^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} = d^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{d^5}$

6. $\sqrt[4]{c^5}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt[5]{c^3} = c^{\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{1}{2}}\cdot c^{\frac{3}{5}} = c^{\frac{25}{20}+\frac{10}{20}+\frac{12}{20}} = c^{\frac{47}{20}}$

7. $\sqrt[4]{\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^{\frac{3}{2}}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{8}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{8}+\frac{4}{8}} = a^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{a^7}$

Und noch das Allerletzte:

$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right) =$ nach dem 1.Potenzgesetz: $\sqrt{2}^{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \sqrt{2}^{2\sqrt{5}} = \left(\sqrt{2}^2\right)^{\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}}$

Die gleiche Lösung erhält man auch durch Anwendung des 4.Potenzgesetzes:

$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right) = \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}}$

Exponenten mit Parametern

Keine Angst. Hier ändert sich nichts. Die Potenzgesetze sind natürlich allgemeingültig und somit müssen sich auch Parameter, bzw. „Terme mit Buchstaben" im Exponenten gemäß diesen Regeln zusammenfassen lassen. Die Erfahrung im praktischen Unterrichtsalltag zeigt aber, dass gerade das Rechnen mit Buchstaben vielen Schülern Probleme bereitet. Nach dem Durcharbeiten der folgenden Aufgaben werdet ihr sehen, dass das Rechnen mit Buchstaben kein Geheimnis ist. Lösungen und Lösungswege auf der nächsten Seite.

Aufgaben

1. $\left(7^{x} \div 7^{\frac{1}{3}x}\right) \div 7^{\frac{2}{3}x}$

2. $x^{2t} \div (4x)^{t}$

3. $\left(c^{t} \div c^{3t}\right) \cdot c^{3t}$

4. $\left(4a^{-2}\right)^{n} \cdot 2a^{-n}$

5. $x^{\frac{2}{n}} \div \left(5x^{\frac{2}{n}}\right)$

6. $(6x)^{2} \div (3x)^{2}$

7. $\left(c^{\frac{2}{k}}\right)^{k} \cdot c^{-2}$

8. $\left(a^{5} \cdot a^{-6}\right)^{2} \div a^{-2}$