

2006 Pflichtaufgabe 3	197
2006 Pflichtaufgabe 4	198
2006 Wahlaufgabe 1a)	199
2006 Wahlaufgabe 1b)	200
2006 Wahlaufgabe 2	201
2007 Pflichtaufgabe 1	202
2007 Pflichtaufgabe 2	203
2007 Wahlaufgabe 1	204
2008 Pflichtaufgabe 1	205
2008 Pflichtaufgabe 2	206
2008 Wahlaufgabe 1	207
2008 Wahlaufgabe 2	208
2009 Pflichtaufgabe 1	209
2009 Wahlaufgabe 2a)	210
2009 Wahlaufgabe 2b)	211
2009 Wahlaufgabe 3	212
Wahrscheinlichkeit (Realschule+Gymnasium)	213
Klassenarbeit 1	213
1. Aufgabe	213
2. Aufgabe	213
Lösungswege	214
Klassenarbeit 2	216
1. Aufgabe	216
2. Aufgabe	216
Lösungswege	217
Klassenarbeit 3	219
1. Aufgabe	220
2. Aufgabe	220
Lösungswege	221
Klassenarbeit 4	223
1. Aufgabe	223
2. Aufgabe	223
Lösungswege	224
Prüfungsaufgaben	226
2008 Pflichtaufgabe 1	226
2008 Wahlaufgabe	227
2009 Pflichtaufgabe 1	228
2009 Pflichtaufgabe 2	229
2009 Wahlaufgabe	230
Trigonometrie (Realschule+Gymnasium)	231
Grundlagen	232
Tipps und Tricks	233
Übungsaufgaben	234
Aufgabe 1	234
Aufgabe 2	235
Aufgabe 3	236
Aufgabe 4	237
Aufgabe 5	238
Aufgabe 6	238

Aufgabe 7	240
Aufgabe 8	241
Aufgabe 9	242
Aufgabe 10	243
Aufgaben mit e („ in Abhängigkeit von ...“)	244
Übungsaufgaben.....	244
Aufgabe 1	244
Aufgabe 2	245
Aufgabe 3	246
Aufgabe 4	247
Aufgabe 5	248
Aufgabe 6	249
Prüfungsaufgaben.....	250
2004 Pflichtaufgabe 1	250
2004 Pflichtaufgabe 2	251
2004 Wahlaufgabe 1	252
2004 Wahlaufgabe 2	253
2005 Pflichtaufgabe 1	254
2005 Pflichtaufgabe 2	255
2005 Wahlaufgabe 1	256
2005 Wahlaufgabe 2	257
2005 Wahlaufgabe 3	258
2006 Pflichtaufgabe 1	259
2006 Pflichtaufgabe 2	260
2006 Wahlaufgabe 1a).....	261
2006 Wahlaufgabe 1b)	262
2006 Wahlaufgabe 2	263
2007 Pflichtaufgabe 1	264
2007 Pflichtaufgabe 2	265
2007 Wahlaufgabe 1a).....	266
2007 Wahlaufgabe 1b)	268
2007 Wahlaufgabe 2	270
2008 Pflichtaufgabe 1	271
2008 Pflichtaufgabe 2	272
2008 Wahlaufgabe 1a).....	273
2008 Wahlaufgabe 1b)	274
2009 Pflichtaufgabe 1	275
2009 Pflichtaufgabe 2	276
2009 Wahlaufgabe 1a).....	277
2009 Wahlaufgabe 1b)	278
Rechnen mit Prozent, Zins und Zinseszins (Realschule+Gymnasium)	279
Grundlagen	280
Übungsaufgaben.....	282
Aufgabe 1	282
Aufgabe 2	283
Aufgabe 3	284
Aufgabe 4	285
Aufgabe 5:	286
Aufgabe 6	287
Aufgabe 7	288
Aufgabe 8	289
Aufgabe 9:	290

Aufgabe 10	291
Prüfungsaufgaben	292
2004 Pflichtaufgabe 1	292
2004 Pflichtaufgabe 2	293
2005 Pflichtaufgabe 1	294
2005 Pflichtaufgabe 2	295
2006 Pflichtaufgabe 1	296
2006 Pflichtaufgabe 2	297
2007 Pflichtaufgabe 1	298
2007 Pflichtaufgabe 2	299
2008 Pflichtaufgabe 1	300
2009 Pflichtaufgabe	301



netzwerk
lernen

www.netzwerk-lernen.de



netzwerk
lernen

www.netzwerk-lernen.de

Allgemeines zur Potenzrechnung (Gymnasium)

Genauso wie die Multiplikation eine Kurzschreibweise der Addition ist, ist die Darstellung von Potenzen eine Kurzschreibweise der Multiplikation.

Beispiel:

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Die Hochzahl (der Exponent) gibt an, wie oft die Grundzahl (die Basis), hier die Zahl 5, miteinander multipliziert wird. Dabei bezeichnet man die 5 als Basis oder Grundzahl und die 3 als Hochzahl oder auch Exponent:

Grundzahl^{Hochzahl} bzw. Basis^{Exponent} also 5^3 Basis Exponent



Steht man bei mehreren Rechenzeichen vor der Entscheidung was man zuerst rechnen muss, dann folgt aus der oberen Darstellung, dass zuerst die Potenzen dran sind. Dann erst darf multipliziert werden und zum Schluss wird dann addiert oder subtrahiert. Was in Klammern steht, wird immer zuerst berechnet. Dies ist die Hierarchie der Mathematik.

Beispiel ohne Klammer: $5 + 2 \cdot 3^2 \rightarrow$ Also zuerst ist die Potenz dran:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 27,$$

dann die Multiplikation mit 2 $\rightarrow 2 \cdot 27 = 54$;

zum Schluss die Addition mit 5 $\rightarrow 5 + 54 = 59$.

Beispiel mit Klammer: $(5 + 2) \cdot 3^2$.

Jetzt ist zuerst die Klammer dran, dann wird multipliziert: $7 \cdot 3^2 = 7 \cdot 27 = 189$

Falsch und echt grausam ist Folgendes:

$5 + 2 \cdot 3^2 \neq 5 + 6^2 = 5 + 216 = 221$. Das richtige Ergebnis haben wir ja schon oben besprochen („Beispiel ohne Klammer“; Ergebnis 59). Der Unterschied im Ergebnis kann also enorm abweichen.

Die Potenzgesetze

Wenden wir uns nun den Gesetzen zu:

Das Kapitel Potenzen wird in Schulbüchern immer in verschiedene Unterkapitel gegliedert. Die Unterteilung wird aufgrund der verschiedenen Hochzahlen vorgenommen. Aber keine Angst, es gelten immer die gleichen Gesetze, egal ob ganze Zahlen, Bruchzahlen, rationale - und irrationale Zahlen oder Parameter als Exponenten auftreten.

Gesetze:

Wie immer in der Mathematik stehen die Gesetze allgemeingültig da. Nach jedem Gesetz findet Ihr 2 Beispiele. Zum Warmrechnen. Etwas heißer wird es dann mit den Beispielen nach den Gesetzen.

1. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ Bei Multiplikation gleicher Basen werden die Hochzahlen addiert.

Beispiele: a) $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$

b) $k^{21} \cdot k^{-20} = k^{21+(-20)} = k^{-1}$

c) $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = x^{\frac{3+5}{4}} = x^{\frac{8}{4}} = x^2$

2. $a^n \div a^k = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ Bei Division gleicher Basen werden die Hochzahlen subtrahiert.

Beispiele: a) $4^5 \div 4^3 = \frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$

b) $k^{21} : k^{-20} = k^{21-(-20)} = k^{41}$

c) $x^{\frac{7}{3}} : x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{7-4}{3}} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$

3. $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$ Treffen 2 Hochzahlen direkt aufeinander (die Hochzahl k potenziert die Zahl a^n), dann werden die Hochzahlen miteinander multipliziert.

Beispiele:

a) $(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$

b) $(k^x)^n = k^{x \cdot n}$

c) $\left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{10}{3}} = x^{\frac{3 \cdot 10}{5 \cdot 3}} = x^{\frac{10}{5}} = x^2$

4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Werden 2 unterschiedliche Basen mit gleichen Hochzahlen multipliziert, so darf man beide Basen unter der gleichen Hochzahl zusammenfassen.

Bsp.: a) $4^3 \cdot 6^3 = (4 \cdot 6)^3 = 24^3$

b) $7^4 \cdot 4^4 \cdot 1^4 = (7 \cdot 4 \cdot 1)^4 = 28^4$

So, das war es schon im Prinzip. Jetzt solltet ihr noch folgende Umformungen kennen, damit ihr losrechnen könnt. Der Rest liegt bei Euch. Üben, Üben, Üben.

Umformungen

1. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ bzw. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ bzw. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ etc.

Das heißt also, dass jede negative Hochzahl auch als Kehrbruch geschrieben werden darf. Das negative Vorzeichen des Exponenten bewirkt eine Kehrbruchsituation.

2. $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$; etc.

Das heißt, dass Wurzeln immer als Bruch-Hochzahlen dargestellt werden können. Die Zahl im Nenner repräsentiert die Wurzel; die Zahl des Zählers stellt die Potenz dar.

Beispiele: a) $\frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{(a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{2}}} = a^{-1}$

b) $k^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k^4}}$

3. $a^0 = 1$ und $a^1 = a$

Beispiele: a) $267895609^0 = 1$

b) $9^1 = 9$

Die oben beschriebenen Umformungen geraten allzu leicht in Vergessenheit, sind aber für Dein weiteres Schulleben in der Oberstufe im Fach Mathematik wichtig.

Mithilfe der folgenden Aufgabe kannst Du Dein Verständnis für die Umformungen trainieren und feststellen wie fit Du momentan schon bist.

Yes, you can...

Aufwärmübung zum Thema Umformen

Ordne den Termen (links) die entsprechenden Lösungen (rechts) zu. Zu jedem Term hast Du 3 Lösungsmöglichkeiten zur Auswahl:

1. $\sqrt[3]{3^2}$

a) 3^6 b) $\sqrt{3}$ c) $3^{\frac{1}{3}}$

2. $\sqrt{2^3}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $2^{\frac{6}{3}}$

3. $\sqrt[3]{5^4}$

a) $\sqrt[3]{5}$ b) 5^3 c) $5^{\frac{1}{3}}$

4. $\sqrt{x^4}$

a) x^2 b) x^4 c) \sqrt{x}

5. $\left(\frac{1}{k^4}\right)^{-2}$

a) k^{-2k} b) $k^{\frac{2}{4}}$ c) k^{2k}

6. $\sqrt[3]{t^6}$

a) $t^{\frac{3}{2}}$ b) $\sqrt[3]{t^2}$ c) $-\sqrt[3]{t^2}$

Lösungen: 1.b); 2.a); 3.a); 4.c); 5.c); 6.b)

Komplexere Aufgaben (Lösungen und Lösungswege siehe nächste Seite)
 Fasse mithilfe Deines Wissens über die Potenzgesetze zusammen.

1. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2}$

Tipp: Fürs Rechnen mit Bruch-Hochzahlen
 musst Du fit im Bruchrechnen sein. Bist Du es?

Der BesserWisser-Kasten: Bruchrechnung

Bei **Addition** und **Subtraktion** Brüche gleichnamig machen
 (auf gleichen Nenner bringen), dann Zähler addieren, Nenner
 beibehalten.

Beispiel: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$

Bei **Multiplikation** einfach Zähler mal Zähler und Nenner mal
 Nenner.

Beispiel: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{35}$

Bei **Division** wird mit dem Kehrwert des Nennerbruches eine
 Multiplikation durchgeführt.

Beispiel: $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$

3. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}$

4. $\sqrt{a} \cdot (\sqrt[3]{a})^2$

5. $(\sqrt{d} \cdot \sqrt[3]{d})^2$

6. $\sqrt[3]{c^2} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{c^3}$

7. $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}} \cdot \sqrt{a}$

Und noch das Allerletzte: $(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}) \cdot (\sqrt[3]{2}^{\sqrt{5}})$

Lösungen und Lösungswege

$$1. \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = 6^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2+1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$$

$$2. \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2} = 128^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{128}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{3 \cdot 1}{3}} = 4^1 = 4$$

$$3. \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} = \left(\frac{x^2}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$$

$$4. \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a})^2 = a^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{2}} = a^{\frac{1+2}{2}} = a^{\frac{3+4}{6}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7}$$

$$5. (\sqrt{d} \cdot \sqrt[3]{d})^2 = \left(d^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{3}}\right)^2 = d^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot d^{2 \cdot \frac{1}{3}} = d^1 \cdot d^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{3+2}{3}} = d^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{d^5}$$

$$6. \sqrt[5]{c^3} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{c^5} = c^{\frac{3}{5}} \cdot c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{5}{3}} = c^{\frac{35}{30} + \frac{10}{30} + \frac{50}{30}} = c^{\frac{95}{30}}$$

$$7. \sqrt[4]{\sqrt{a^3}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[4]{a^{\frac{3}{2}}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{8}} \cdot a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{3+4}{8}} = a^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{a^7}$$

Und noch das Allerletzte:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right) = \text{nach dem 1. Potenzgesetz: } \sqrt{2}^{\sqrt{5} + \sqrt{5}} = \sqrt{2}^{2 \cdot \sqrt{5}} = \left(\sqrt{2}^2\right)^{\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}}$$

Die gleiche Lösung erhält man auch durch Anwendung des 4. Potenzgesetzes:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\sqrt{2}^{\sqrt{5}}\right) = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}}$$

Exponenten mit Parametern

Keine Angst. Hier ändert sich nichts. Die Potenzgesetze sind natürlich allgemeingültig und somit müssen sich auch Parameter, bzw. „Terme mit Buchstaben“ im Exponenten gemäß diesen Regeln zusammenfassen lassen. Die Erfahrung im praktischen Unterrichtsalltag zeigt aber, dass gerade das Rechnen mit Buchstaben vielen Schülern Probleme bereitet. Nach dem Durcharbeiten der folgenden Aufgaben werdet ihr sehen, dass das Rechnen mit Buchstaben kein Geheimnis ist. Lösungen und Lösungswege auf der nächsten Seite.

Aufgaben

1. $\left(7^k + 7^{\frac{1}{2}k}\right) \cdot 7^{\frac{2}{3}k}$

2. $x^{2k} + (4x)^k$

3. $(c^k + c^{2k}) \cdot c^{3k}$

4. $(4a^{-2})^m \cdot 2a^{-m}$

5. $x^{\frac{2}{3}} + \left(5x^{\frac{2}{3}}\right)$

6. $(6x)^2 + (3x)^2$

7. $\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^4 \cdot c^{-2}$

8. $(a^{-5} \cdot a^{-6})^2 + a^{-2}$