KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Dauer	4–5 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Methoden:	Bildbetrachtung, Computer- und Softwareeinsatz, Diagrammerstellung, Übung
Materialart	Differenzierungsmaterial, Textimpuls, Bildimpuls
Thematische Bereiche:	Erwartungswert, Varianz, Baumdiagramm, Pfadmultiplikations- und Pfadadditionsregel, (bedingte) Wahrscheinlichkeit, stochastisch (un-) abhängig, hypergeometrische Verteilung, Binomialverteilung, „3-mal mindestens“-Aufgabe, faires Spiel, σ -Umgebung

Fachliche Hinweise

Ihre Klasse kennt verkürzte Baumdiagramme und die Pfadregeln. Die Lernenden berechnen ohne Schwierigkeiten Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten mit unterschiedlichen Lösungsverfahren. Die hypergeometrische Verteilung kann mithilfe der angegebenen Formel eingeführt werden.

Lehrplanbezug

In den Kernlernplänen NRW (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf, aufgerufen am 16.06.2025) sind im Inhaltsfeld „Stochastik“ unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben,
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen,
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen,
- verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,

Auf einen Blick

Stochastik beim Spiel mit vier Würfeln und einem Glücksrad

M 1	Aufgaben
Benötigt:	☐ evtl. Internet

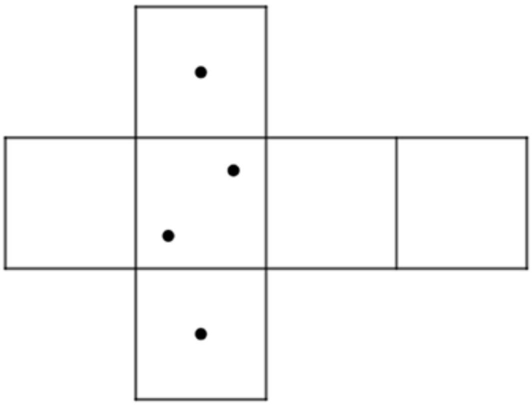
Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Aufgaben

M 1

Nebenstehende Abbildung zeigt das Netz eines Würfels; zwei Seiten sind jeweils mit einem Punkt, eine dritte Seite mit zwei Punkten versehen.



Grafik: Günther Weber

Die drei anderen Seiten des Würfels enthalten ebenfalls 1 bis 6 Punkte, wobei die Anzahl der Punkte auch auf diesen Seiten mehrfach vorkommen kann.

1. Versehen Sie alle Seiten des Würfels mit Punkten, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:
   – Beim einmaligen Werfen des Würfels ist der Erwartungswert für die Anzahl der Punkte 2.
   – Auf den sechs Seiten kommen genau drei verschiedene Anzahlen von Punkten vor.

   Zeigen Sie, dass der Würfel auf genau vier verschiedene Arten mit Punkten versehen werden kann.

Bei den folgenden Aufgaben werden die vier möglichen Würfel so bezeichnet, dass die größte Anzahl an Punkten auf den Seiten des Würfels den Namen des Würfels angibt. So enthält der Würfel W_3 wenigstens eine Seite mit 3 Punkten und keine Seite mit 4 oder mehr Punkten.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die vier Würfel und berechnen Sie die Varianz.
3. Einer der vier Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis E: „Die Anzahl der Punkte ist beim zweiten Wurf größer als beim ersten Wurf". Bestimmen Sie den Würfel, bei dem die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E am größten ist.
4. Der Würfel W_5 wird zweimal nacheinander geworfen und der Unterschied der Punkte bei den beiden Würfen bestimmt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10-maliger Durchführung des Doppelwurfs folgendes Ereignis (= Unterschied der Punkte) eintritt:

   E1: genau dreimal das Ergebnis 3 eintritt.
   E2: höchstens fünfmal das Ergebnis 1 eintritt.
   E3: Mehr als zweimal und höchstens achtmal das Ergebnis gerade ist.
   E4: höchstens viermal oder wenigstens neunmal das Ergebnis 0 ist.

Lösungen

Aufgabe 1

Sind die drei anderen Seiten des Würfels mit a, b bzw. c Punkten versehen, so ist genau eine Punktzahl ungleich 1 Punkt oder 2 Punkten, da es genau drei verschiedene Anzahlen von Punkten gibt. Diese Punktzahl kann aber mehrfach vorkommen.
Da der Erwartungswert beim einmaligen Werfen gleich zwei ist, gilt:

$$\frac{a+b+c+1+1+2}{6}=2$$
$$a+b+c=8$$

Folglich sind die drei freien Seiten des Würfels insgesamt mit acht Punkten beschriftet.
Im Folgenden sei a die Punktzahl ungleich 1 Punkt oder 2 Punkten.

a = 6 Punkte $\Rightarrow$ $b=c=1\,\text{Punkt}$

Möglichkeit 1: Die Anzahl der Punkte auf den Seiten des Würfels ist: 1, 1, 1, 1, 2, 6 (W_6)

a = 5 Punkte $\Rightarrow$ $b=1\,\text{Punkt};\, c=2\,\text{Punkte}$

Möglichkeit 2: Die Anzahl der Punkte auf den Seiten des Würfels ist: 1, 1, 1, 2, 2, 5 (W_5)
Diese Variante ist äquivalent zu b = 2 Punkte und c = 1 Punkt

a = 4 Punkte $\Rightarrow$ $b=c=2\,\text{Punkte}$

Möglichkeit 3: Die Anzahl der Punkte auf den Seiten des Würfels ist: 1, 1, 2, 2, 2, 4 (W_4)
Die Möglichkeit $b=1\,\text{Punkt};\, c=3\,\text{Punkte}$ entfällt, da dann mehr als 3 verschiedene Punktzahlen auf den Seitenflächen vorkommen.

a = 3 Punkte $\Rightarrow$ $b=3\,\text{Punkte};\, b=2\,\text{Punkte}$

Möglichkeit 4: Die Anzahl der Punkte auf den Seiten des Würfels ist: 1, 1, 2, 2, 3, 3 (W_3)
Ähnlich wie bei Möglichkeit 2 ist diese Variante äquivalent zu b = 2 Punkte und c = 3 Punkte.

Andere Möglichkeiten entfallen, da dann mehr als drei verschiedene Punktzahlen auf den Seitenflächen vorkommen würden.

Aufgabe 2

Beim Werfen der Würfel handelt es sich um einen Laplace Zufallsversuch. Gibt die Zufallsvariable X die Anzahl der Punkte an, so erhält man als Wahrscheinlichkeitsverteilung für

W_3:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

W_4:

x_i	1	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

W_5:

x_i	1	2	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

W_6:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung einer Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert. Für die 3 verschiedenen Punktzahlen auf den Seiten des Würfels somit $V(X)=\sum_{i=1}^{3}(x_i-E(X))^2\cdot P(X=x_i)$. Der Erwartungswert 2 ist bei allen Würfeln aufgrund der Bedingungen aus Aufgabe 1) bekannt.

W_3:

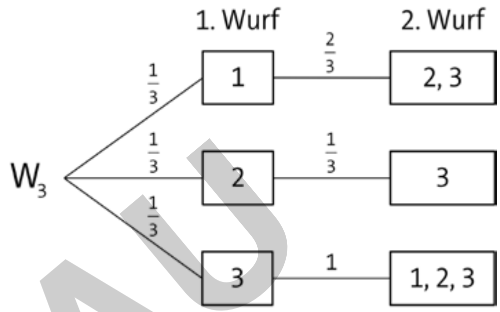
x_i	1	2	3
$x_i-E(X)$	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$V(X)=(-1)^2\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

c) Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn das Eintreten von A keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von B hat und umgekehrt, d. h., wenn $P_A(B) = P(B)$ bzw. $P_B(A) = P(A)$ ist.
Dies ist dann der Fall, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

Untersuchung von Würfel W_3 auf stochastische Unabhängigkeit:

Es ist $P(A) = P(2) = \frac{1}{3}$. Nach Zeichnen eines Baumdiagramms, Eintragen der Pfadwahrscheinlichkeiten und Berechnen der Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ und $P(A \cap B)$ (oberster Pfad im Baumdiagramm) erhält man



$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ und

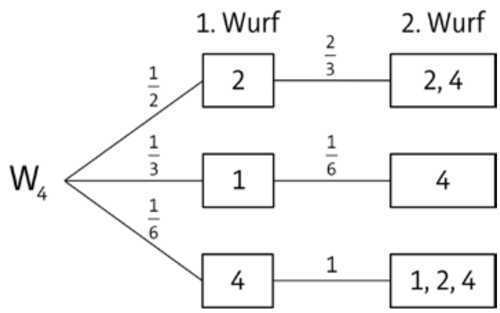
$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = P(A \cap B)$

Die Ereignisse A und B sind beim Würfel W_3 stochastisch unabhängig.

Untersuchung von Würfel W_4 auf stochastische Unabhängigkeit:

Es ist $P(A) = P(2) = \frac{1}{2}$. Nach Zeichnen eines Baumdiagramms, Eintragen der Pfadwahrscheinlichkeiten und Berechnen der Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ und $P(A \cap B)$ (oberster Pfad im Baumdiagramm) erhält man



$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$

und

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} \neq \frac{1}{3} = P(A \cap B)$

Die Ereignisse A und B sind beim Würfel W_4 stochastisch abhängig.