II.B.29

Lineare Algebra und analytische Geometrie

Skalar- und Vektorprodukt in realitätsnahen Anwendungskontexten

Johann-Georg Vogelhuber

Skalar- und Vektorprodukte sind wichtige mathematische Konzepte mit breiter Anwendung. Motivieren Sie die Lernenden, indem Sie reale Beispiele nutzen, um diese Konzepte zu erklären und anzuwenden. Das fördert nicht nur ihr Verständnis, sondern stärkt auch ihre Fähigkeiten in der Anwendung der linearen Algebra. Erklärvideos bieten Hilfestellung beim Verständnis und fördern zusammen mit Tipps die Lernenden individuell. Als kreative und motivierende Lernerfolgskontrolle steht ein *Kahoot*-Quiz zur Verfügung.

KOMPETENZPROFIL

Kahoot!

Klassenstufe:	Sek. II
Dauer:	6–8 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Skalar- und Vektorprodukt zur Berechnung von Flächeninhalten, Winkeln und Abständen von geometrischen Objekten
Kompetenzen:	mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt, In: Infomaterial
Planung für 6–8 Stunden

Einstieg

Thema:	**Problemorientierter Unterrichtseinstieg**
M 1 (Ab)	Ein neuer Auftrag für die Weiterentwicklung der Solar-Mapp Pro Suite – Berechnung von Winkeln und Flächeninhalten
M 2 (Ab)	Konkrete Daten und Analyse der Situation

Erarbeitung

Thema:	**Vektor- und Skalarprodukt als Hilfsmittel zur Berechnung von Flächen und Winkeln**
M 3 (Ab)	Gruppenpuzzle zur Durchführung der Berechnungen
M 4 (In)	Infotext Skalarprodukt
M 5 (In)	Infotext Vektorprodukt
M 6 (Ab)	Übungsaufgaben zum Vektor- und Skalarprodukt
M 7 (Ab)	Ein weiterer Auftrag für Max – Berechnung von Abständen
M 8 (In)	Infotext Hesse'sche Normalform
M 9 (Ab)	Konkrete Daten und Analyse
M 10 (Ab)	Übungsaufgaben zur Hesse'schen Normalform

Sicherung

Thema:	**Vektor- und Skalarprodukt**
M 11 (Ab)	Wissensspeicher Vektorprodukt und Skalarprodukt

Lernerfolgskontrolle

Thema:	**Vektor- und Skalarprodukt**
M 12 (Ab)	Testen Sie Ihr Wissen

Lösung

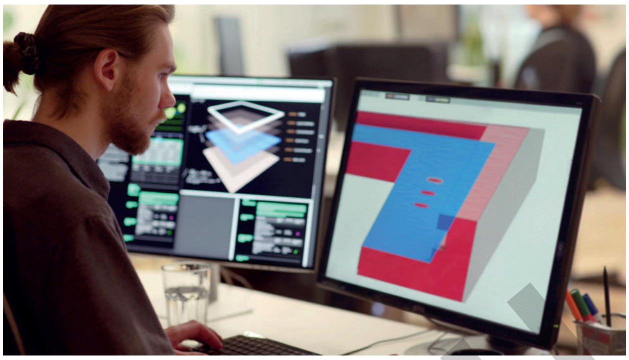
Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 20.

Einstieg: Ein neuer Auftrag für die Weiterentwicklung der SolarMapp Pro Suite – Berechnung von Winkeln und Flächeninhalten

M 1

Situationsbeschreibung

Max ist Teil des Start-ups „SunTech Innovations GmbH“. Als auszubildender Fachinformatiker für Anwendungsentwicklung ist er an der Entwicklung der „SolarMapp Pro Suite“ beteiligt, die weltweit von Solaranlagenplanungsunternehmen und im Ingenieurwesen genutzt wird. Die „SolarMapp Pro Suite“ ist eine innovative Software- und Hardwarelösung für die Vermessung von Dächern und die Planung von Solaranlagen. Mithilfe von speziellen Drohnen können Dachflächen präzise vermessen und als 3-D-Modell dargestellt werden. Mithilfe dieser 3-D-Modelle können dann Solaranlagen geplant und die Effizienz der Anlagen beurteilt werden. Für diese Effizienzbeurteilung ist zum einen die Größe der Dachfläche und zum anderen der durchschnittliche Sonneneinstrahlungswinkel entscheidend.



© Laurence Dutton/E+

Max wurde damit beauftragt, die Berechnung der Dachfläche zu verbessern und die Ermittlung des Sonneneinstrahlungswinkels als neue Funktion zu implementieren. Dazu soll er zunächst die Berechnungen anhand von Beispieldaten nachvollziehen, um später die Korrektheit seines Programms überprüfen zu können. Seine Ausbilderin Mareike hat ihm dazu ein 3-D-Modell zur Verfügung gestellt und in einer E-Mail die Anforderungen mitgeteilt:

Re: Anforderungen Dachflächenberechnung/Sonneneinstrahlwinkel

Hallo Max,

danke für deine Rückfrage. Bei dem neuen Softwaremodul bitte folgende Punkte berücksichtigen:

Alle Berechnungen sollen mithilfe von Vektoren durchgeführt werden.

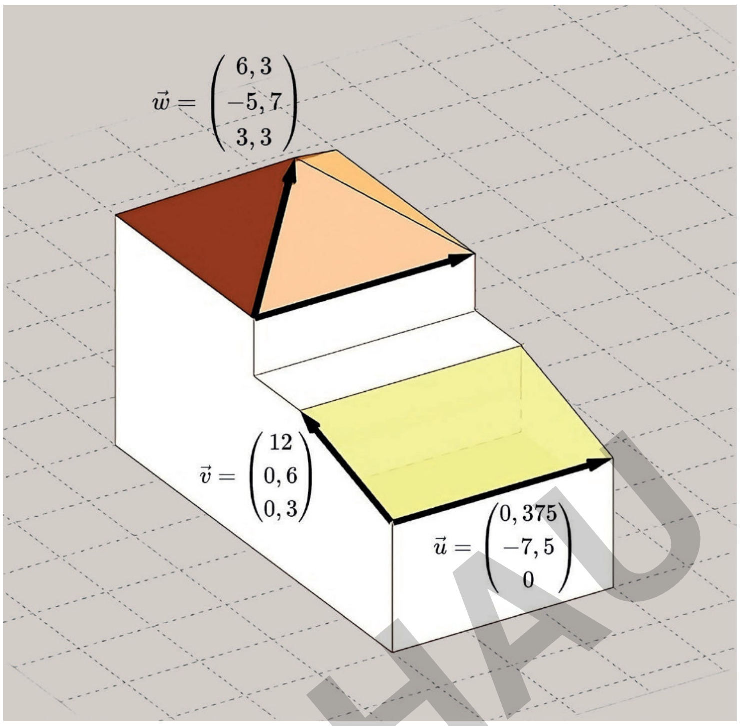
Die Berechnung der Dachfläche muss mit dem Vektorprodukt durchgeführt werden, da wir den Normalenvektor der Dachfläche auch für den Einstrahlungswinkel benötigen. Den Einstrahlungswinkel musst du mit dem Skalarprodukt berechnen. Bei allen zu berechnenden Dachflächen muss der Winkel zwischen den beiden “Kantenvektoren” berechnet und geprüft werden, ob es sich um ein Rechteck handelt, d. h. ob der Winkel zwischen den gegebenen Vektoren 90° beträgt.

Wenn du die Berechnungen für das Modell durchgeführt hast, dann bereite bitte die Berechnungen übersichtlich und mit Skizzen auf, sodass wir diese in die Dokumentation der Software mit aufnehmen können.

Viele Grüße

Mareike

M 2 Einstieg: Konkrete Daten und Analyse der Situation



Die Koordinaten in dieser Abbildung sind in Metern angegeben. Die Richtung der Sonnenstrahlen kann in diesem Testbeispiel durch den Richtungsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 6,79 \\ 0 \\ -5,9 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Analyse

Was muss Max in der Situation alles berechnen?

____

____

Welche Daten hat er dazu zur Verfügung?

____

____

Welche mathematischen Konzepte soll er dazu verwenden?

____

In welcher Form soll das Ergebnis dargestellt werden?

____

Erarbeitung: Gruppenpuzzle zur Durchführung der Berechnungen

M 3

Die Berechnungen sollen in Form eines Gruppenpuzzles arbeitsteilig durchgeführt werden.

Ablauf

1. **Stammgruppen bilden:** Bilden Sie Stammgruppen mit jeweils 3 Personen. In jeder Stammgruppe übernimmt jeweils eine Person eine der unten aufgeführten Aufgaben. Tragen Sie den Namen des zuständigen Gruppenmitglieds in die folgende Tabelle ein.

Aufgabe	Wer ist verantwortlich?
Flächeninhalt der Dachflächen berechnen	
Winkel der Dachflächen berechnen	
Sonneneinfallswinkel für beide Dachflächen berechnen	

2. **Expertengruppen bilden:** Bilden Sie entsprechend der zugewiesenen Aufgaben Expertengruppen. Jede Expertengruppe sollte etwa aus drei Personen bestehen. Bearbeiten Sie in dieser Expertengruppe gemeinsam die zugewiesene Aufgabe. Dazu verwenden Sie die vorhandenen Daten (**M 2**) und das Infomaterial (**M 4** und **M 5**).
Beachten Sie dabei die gemeinsam vereinbarten Anforderungen an die Lösung.

3. **Wissen teilen:** Kommen Sie wieder in ihren Stammgruppen zusammen. Jedes Mitglied präsentiert den Lösungsweg für die entsprechende Aufgabe. Vervollständigen Sie anschließend gemeinsam den Wissensspeicher (**M 11**) soweit wie möglich.

Gruppe 1 – Flächeninhalt der Dachflächen berechnen
Berechnen Sie den Flächeninhalt der farblich markierten Dachflächen. Verwenden Sie dazu das Vektorprodukt.

Tipp: Verwenden Sie das Infomaterial **M 5**, um mehr über das Vektorprodukt zu erfahren.

Gruppe 2 – Winkel der Dachflächen berechnen
Berechnen Sie für die farblich markierten Dachflächen den Winkel zwischen den beiden aufspannenden Vektoren. Verwenden Sie dazu das Skalarprodukt.

Tipp: Verwenden Sie das Infomaterial **M 4**, um mehr über das Skalarprodukt zu erfahren.

Gruppe 3 – Sonneneinfallswinkel für eine der Dachflächen berechnen
Berechnen Sie den Sonneneinfallswinkel für die rechteckige Dachfläche. Verwenden Sie dazu Skalar- und Vektorprodukt.

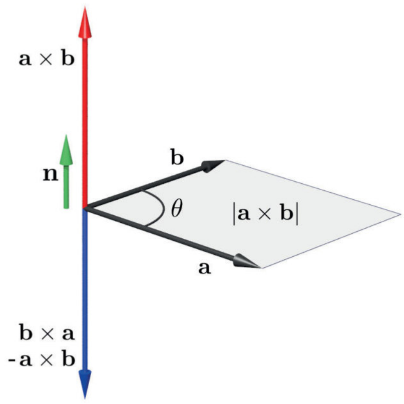
Tipp: Verwenden Sie dazu das Infomaterial **M 4** und **M 5**.

M 5

Erarbeitung: Infotext Vektorprodukt

https://raabe.click/vektorprodukt

Das Vektorprodukt, auch als Kreuzprodukt bekannt, ist eine wichtige mathematische Operation in der Vektorrechnung. Es ermöglicht uns, einen neuen Vektor zu erzeugen, der senkrecht zu den beiden gegebenen Vektoren steht. Das Vektorprodukt ist besonders nützlich in der Geometrie und in physikalischen Anwendungen. Besonders häufig wird das Vektorprodukt benötigt, um einen senkrechten Vektor zu einer Ebene zu konstruieren oder um Flächeninhalte zu berechnen. Das Kreuzprodukt wird folgendermaßen berechnet:



$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

Mithilfe des Skalarproduktes kann man zeigen, dass dieser Vektor immer senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist das Ergebnis des Kreuzproduktes ein Vektor!

https://raabe.click/Vektorprodukt-Flächeninhalt

Beispiel – Berechnung Vektorprodukt und Flächeninhalt

Berechne das Kreuzprodukt der Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-7\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}3\cdot5-(-2)\cdot(-7)\\(-2)\cdot3-1\cdot5\\1\cdot(-7)-3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-11\\-16\end{pmatrix}$$

Die Länge des Vektors $\vec{a}\times\vec{b}$ entspricht dabei dem Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

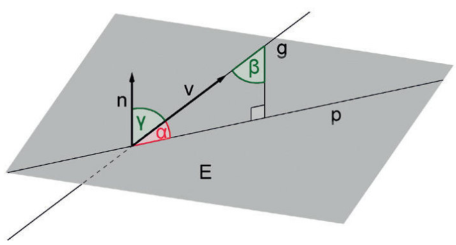
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-11)^2+(-16)^2}\approx 19{,}44$$

Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms würde in diesem Fall 19,44 Flächeneinheiten betragen.

https://raabe.click/schnittwinkel

Schnittwinkel Gerade und Ebene berechnen

Um den Schnittwinkel zwischen einer Gerade $g:\vec{x}=\vec{u}+t\cdot\vec{v}$ und einer Ebene $E:\vec{x}=\overrightarrow{u_E}+r\cdot\overrightarrow{v_E}+s\cdot\overrightarrow{w_E}$ zu bestimmen, berechnet man mithilfe des Vektorproduktes einen Normalenvektor $\vec{n}=\overrightarrow{v_E}\times\overrightarrow{w_E}$ zu E.



Anschließend berechnet man dann mithilfe des Skalarproduktes den Winkel γ zwischen Richtungsvektor der Gerade $\vec{v}$ und Normalenvektor $\vec{n}$. Der Schnittwinkel α ist dann $\alpha=90°-\gamma$.

Hinweis: Es ist auch möglich, dass $\gamma>90°$ ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{v}$ – bildlich gesprochen – auf verschiedene Seiten der Ebene zeigen. In diesem Fall ergibt sich der gesuchte Vektor durch Bildung des Betrags: $\alpha=\left|90°-\gamma\right|$.

M 7 Erarbeitung: Ein weiterer Auftrag für Max – Berechnung von Abständen

Situationsbeschreibung

Nachdem Max erfolgreich die Berechnung der Dachfläche und des Sonneneinstrahlwinkels implementiert hat, wird er von seiner Ausbilderin Mareike mit einer neuen Aufgabe betraut:

© Bestgreenscreen/iStock/Getty Images Plus

Als Nächstes wollen wir die Steuerung der Vermessungsdrohnen verbessern. Diese Drohnen sind mit Kameras, GPS, Ultraschall-, Gyro- und Lasersensoren ausgestattet und erfassen damit die Abmessungen eines Hauses. Im Prinzip funktioniert das wie ein großer 3-D-Scanner. Die Daten werden dann an die „SolarMapp Pro Suite“ per WLAN gesendet.

Und was soll daran verbessert werden?

Mareike

Wir möchten die Aufgabe schneller lösen und dazu zwei Drohnen gleichzeitig einsetzen. Die Drohnen fliegen immer auf geradlinigen Flugbahnen, dabei müssen wir sicherstellen, dass der Abstand zwischen zwei Flugbahnen einen Mindestwert von 2 Metern nicht unterschreitet, da wir sonst keine Geschwindigkeitsverbesserung erreichen.

Max

Aber das ist doch recht leicht, wenn die Flugbahnen parallel verlaufen.

Du hast recht. Aber um ein Haus komplett zu erfassen, verwenden wir Flugbahnen, die windschief zueinander sind. So stellen wir sicher, dass wir alle Hausformen auch korrekt erfassen können.

Das ist natürlich sinnvoll. Sollen noch weitere Dinge überarbeitet werden?

Tatsächlich müssen wir noch einmal die Sicherheitsfunktion der Drohnen kontrollieren. Die Drohnen sollen einem Haus nicht näher als 3 Meter kommen. Für beide Aufgaben kannst du als Erstes wieder die Testfälle berechnen und eine Dokumentation erstellen. Ich habe das 3-D-Modell schon entsprechend vorbereitet.

Wahrscheinlich brauche ich dafür wieder Vektor- und Skalarprodukt, aber genau weiß ich nicht, wie das gehen soll.

Schau dir mal die Hesse’sche Normalform an. Dazu haben wir bereits eine Dokumentation erstellt. Damit sind Abstandsberechnungen sehr leicht.

M 12 Sicherung: Testen Sie Ihr Wissen

Aufgabe

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an. Beachten Sie, dass in manchen Fällen auch mehr als eine Antwort richtig ist.

Wie wird das Vektorprodukt noch genannt?

- ☐ *Kreuzprodukt*
- ☐ *Wechselprodukt*
- ☐ *skalare Multiplikation*
- ☐ *Skalarprodukt*

Berechne das Vektorprodukt! Welche Antwort ist richtig?

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}=$$

- ☐ $\begin{pmatrix}-12\\4\\-14\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}4\\-14\\-12\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}4\\14\\-12\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}14\\-4\\12\end{pmatrix}$

Der Betrag des Vektorprodukts ist so groß wie der Flächeninhalt des durch die Ausgangsvektoren aufgespannten …

- ☐ *Dreiecks.*
- ☐ *Quadrats.*
- ☐ *Winkels.*
- ☐ *Parallelogramms.*

Der Schnittwinkel zwischen Gerade g und Ebene E berechnet sich mithilfe …

- ☐ *… der beiden Normalenvektoren von g und E.*
- ☐ *… der beiden Richtungsvektoren von g und E.*
- ☐ *… des Richtungsvektors von g und des Normalenvektors von E.*
- ☐ *… der beiden Normalenvektoren von g und h.*

Was muss bei der Berechnung des Schnittwinkels zwischen Gerade g und Ebene E beachtet werden?

- ☐ *α darf keine Kommazahl (Dezimalzahl) sein.*
- ☐ *Das Skalarprodukt darf nicht 0 sein.*
- ☐ *Die beiden Normalenvektoren dürfen nicht kollinear sein.*
- ☐ *Der berechnete Winkel muss von 90° subtrahiert werden*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist sicher …

- ☐ *… eine reelle Zahl*
- ☐ *… ein Vektor.*
- ☐ *… größer als null.*
- ☐ *… gleich null.*