Inhaltsverzeichnis

LemaS
LEISTUNG macht SCHULE

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Dieses Buch wurde vom BMBF-geförderten Forschungsverbund „Leistung macht Schule“ (LemaS) im Rahmen des gleichnamigen Projekts der gemeinsamen Initiative von Bund und Ländern zur Förderung leistungsstarker und potenziell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler entwickelt. Es soll Lehrerinnen und Lehrer beim Fördern von Potenzialen und Leistungsstärken im regulären Mathematikunterricht unterstützen.

Aufgabenmaterialien für forschendes Lernen im Mathematikunterricht

Die Aufgabenmaterialien in diesem Abschnitt sind als ganze Unterrichtsstunden bzw. Doppelstunden für alle Kinder einer Klasse konzipiert. Die auf „Standardthemen“ der Lehrpläne bezogenen Aufgaben sind für die 5. und 6. Klasse vorgesehen, sie lassen sich aber teilweise (ggf. angepasst) auch in der 7. und 8. Klasse nutzen. Wir haben die Aufgabenmaterialien entsprechend den schulischen Hauptinhaltsbereichen strukturiert.

- Arithmetik (Zahlen und Zahlbeziehungen, Rechnen und Rechenbeziehungen)
- Geometrie (Formen, Lagebeziehungen, Konstruktionen, …)
- Sachrechnen und Größen
- Kombinatorik, Statistik, Wahrscheinlichkeiten, logische Knobeleien

Mit allen Aufgaben werden die prozessbezogenen Kompetenzen aus den Bildungsstandards angesprochen und gefördert. Eine Übersicht darüber, welche Kompetenzen durch welche Aufgaben abgedeckt werden, finden Sie auf der folgenden Seite.

Die didaktisch-methodische Aufbereitung aller Aufgabenmaterialien basiert auf der Leitidee des aktiv entdeckenden bzw. forschenden Lernens und auf der hiermit verbundenen natürlichen Differenzierung vom Kind und vom Fach aus. Das bedeutet, dass die Aufgaben spannende mathematische Themen aufgreifen, somit die Neugier aller Kinder wecken und sie zum kreativ spielerischen und entdeckenden Lernen motivieren. Dies ist dadurch gewährleistet, dass alle, auch leistungsschwächere Kinder, zumindest die Einstiegsaufgaben oder Teile der offenen Aufgaben erfolgreich bearbeiten können. Dass solche Forscherstunden sehr erfolgreich in den regulären Unterricht integriert werden können, belegen unsere einschlägigen Erfahrungen im LemaS-Projekt. Die vorher oft skeptischen Lehrkräfte erfuhren beim Einsatz der Aufgaben, dass das forschende Lernen nicht nur besonders begabte, sondern prinzipiell alle Kinder motiviert und den Mathematikunterricht sowohl inhaltlich als auch methodisch bereichert. Das Feedback einer Schülerin aus einer Gesamtschule in Aachen belegt diese Einschätzung:

> „Es macht Spaß und man lernt, wie viel man kann!“

Beim Einsatz der Forscheraufgaben ist aus didaktisch-methodischer Sicht wichtig: Jedes Kind kann die offenen Aufgaben entsprechend seinen Voraussetzungen bearbeiten und dabei selbst bestimmen, welche Lösungswege es geht und wie es seine Ergebnisse darstellt. Sie können in Abhängigkeit von Ihren Intentionen sowie den konkreten Rahmenbedingungen den Einsatz der Materialien anpassen. So können Sie beispielsweise die vorgegebenen Aufgaben vom Umfang her reduzieren oder Aufgabentexte und grafische Darstellungen vom Schwierigkeitsgrad her ändern und auf diese Weise den konkreten Lernniveaus der Kinder anpassen. Hierzu könnten Sie ggf. Zahlen bzw. Größenangaben ändern, Zusatzinformationen ergänzen, Sachtexte an regionale Kontexte anpassen oder Texte kürzen.

Zu jedem Aufgabenfeld gibt es für Sie als Lehrkraft eine Übersichtsseite, der Sie Informationen wie inhaltliche Schwerpunkte, benötigte Materialien und Empfehlungen zum Ablauf entnehmen können. Es folgen die Kopiervorlagen für die Lernenden sowie eine Tippseite mit konkreten Tipps zur Bearbeitung der Aufgaben. Die Tippseiten sind so gestaltet, dass Sie z. B. zwischen zwei leere Seiten in eine Klarsichthülle gesteckt werden können und so von den Kindern stückweise herausgezogen werden können. Auf diese Weise sehen die Kinder immer nur den nächsten Tipp und es wird ihnen nicht zu viel vorgegeben. In diesem Sinne verstehen wir das Nutzen der Tippkarten als „Hilfen zur Selbsthilfe“ für die Kinder und als Möglichkeit, die Selbstkompetenzen von Lernenden zu fördern.

Die Lösungshinweise bieten Lösungen und Vorschläge für Lösungswege und werden an vielen Stellen durch authentische Schülerlösungen ergänzt, die wir durch die Erprobung des Materials erhalten haben. Wie Sie jedoch wissen, kann man Unterricht nicht auf dem „Reißbrett“ planen und durchführen. Insofern sollten Sie beim Einsatz der Aufgaben der eigendynamischen Entwicklung von Lernprozessen einen ausreichenden Spielraum lassen – ganz im Sinne des mathematisch-produktiven Tätigseins.

Anmerkung:
Die in diesem Kapitel verwendeten Informationen zu Mathematikern und zu bekannten Sätzen der Mathematik entnehmen wir aus dem Lexikon der Mathe…

Rechnen in anderen „Ländern“

Klassenstufen: 6 (ggf. 7) **Mathematische Leitidee:** Zahl und funktionaler Zusammenhang

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Entwickeln neuer effizienter Rechenwege in einem bisher unbekannten Zahlsystem, Erweiterung auf neue Zahlbereiche
- Erkunden von Regelmäßigkeiten und Entdecken mathematischer Zusammenhänge
- Erkunden verschiedener Vorgehensweisen beim Problemlösen

Lernmaterialien: **Zeit:** 90 Minuten
- Kopiervorlagen 1, 2 und 3
- Tippseite
- ggf. Taschenrechner
- ggf. vergrößertes Bild von Kopiervorlage 1

Empfehlungen zum Ablauf:

Phase	Inhalt	Sozialform/Material
Einstieg 15 min	Die L und die SuS besprechen anhand des Bildes „Im Uhrenland“, wie im Uhrenland gerechnet wird. Die SuS entdecken, dass wie bei Uhrzeiten 15 Uhr und 3 Uhr gleich sind und deswegen 9 + 6 nicht 15, sondern 3 ergibt. Die L führt Schreibweise „$15 \equiv 3$“ ein: *Diese Rechnung nennen Mathematiker „Modulorechnung“* z. B.: $15 \equiv 3 \pmod{12}$ (gelesen: „*15 ist kongruent zu 3 modulo 12*“) Die L erörtert mit den SuS, dass 12 Uhr und 0 Uhr gleich sind und es sinnvoller ist, 0 zu verwenden, weil die Zahl 0 besonders wichtig ist und das „Modulorechnen“ mit 0 einfacher ist. Beispielaufgabe an der Tafel: $3 \cdot 10 \equiv 6 \pmod{12}$ Die SuS finden verschiedene Rechenwege, z. B.: $3 \cdot 10 = 30$. Dann bestimmt man den Rest beim Teilen durch 12. 30 : 12 = 2 Rest 6, also ist $30 \equiv 6 \pmod{12}$ oder $3 \cdot 10 = 30$. Man zieht vom Ergebnis immer wieder 12 ab, bis das Ergebnis kleiner als 12 ist: $30 - 12 - 12 \equiv 6 \pmod{12}$. Die L stellt Aufgaben für die Forscherphase vor.	Plenum Bild von KV 1
Forscherphase 60 min	Die SuS bearbeiten die Aufgaben selbstständig und bestimmen selbst über die Nutzung von Hilfsmitteln, die Wahl und Darstellung von Lösungswegen, sowie die soziale Lernform. Die L regt zum Entdecken und Angeben von Gesetzmäßigkeiten an und würdigt jede Entdeckung. Die L weist ggf. darauf hin, dass Aussagen für einzelne Zahlen noch nicht für alle Zahlen gelten müssen (1, 4 und 9 unterscheiden sich z. B. von 3) und so eine genaue Untersuchung aller Zahlen 0 bis 12 notwendig ist.	Einzel-/Partner-/ Gruppenarbeit KV 1, 2 und 3 ggf. Tippseite ggf. Taschenrechner
Auswertung 15 min	Die SuS stellen verschiedene Entdeckungen vor und diskutieren diese. Die L würdigt die Entdeckungen und ergänzt sie. Die L erklärt, dass sie beim Bearbeiten der Aufgabe 1b) von KV 3 den „Satz des kleinen Fermat“ erkunden konnten, der im 17. Jahrhundert von dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat entdeckt wurde: $a^p \equiv a \pmod{p}$ für jede Primzahl p ($a \in \mathbb{N}$).	Plenum

Im Uhrenland

Im Uhrenland kannst du interessante Entdeckungen machen. Berechne.

$9 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{12}$

$9 \cdot 9 \cdot 9 \equiv$

$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \equiv$

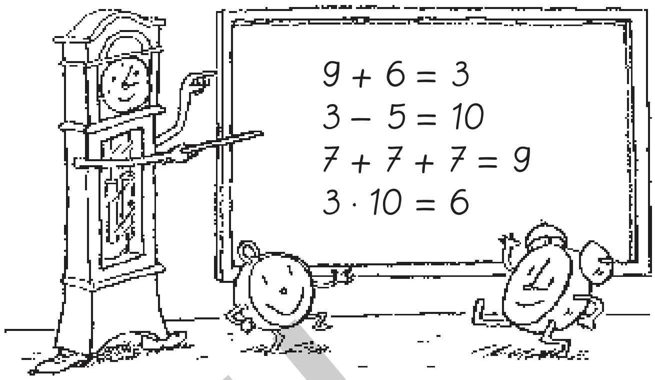
$4 \cdot 4 \equiv$

$4 \cdot 4 \cdot 4 \equiv$

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \equiv$

$4^{17} \equiv$

$4^{328} \equiv$



Kannst du mit allen Zahlen so rechnen?
Kannst du weitere interessante Entdeckungen machen?

Im Fünferland

1. Neben Uhrenland liegt Fünferland.
Hier wird wieder in einem eigenen Rechensystem gerechnet. Dort ist z. B.

$$1 + 4 \equiv 0 \ (\text{mod } 5) \text{ und } 2 \cdot 3 \equiv 1 \ (\text{mod } 5)$$

Damit keine Verwirrung entsteht, hängen für Fremde überall Plakate mit den Rechenregeln. Kannst du sie vervollständigen?

+	0	1	2	3	4
0	0	1			
1					0
2					
3					
4					

·	0	1	2	3	4
0					
1					
2				1	
3					
4					

2. Aus diesen Rechenregeln ergeben sich interessante Rechnungen. Formuliere deine Entdeckungen!

Auf den Spuren von Pierre de Fermat

1. Berechne.

$2 \cdot 2 \equiv$ _____ (mod 5)

$2 \cdot 2 \cdot 2 \equiv$ _____ (mod 5)

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \equiv$ _____ (mod 5)

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \equiv$ _____ (mod 5)

$3 \cdot 3 \equiv$ _____ (mod 5)

$3 \cdot 3 \cdot 3 \equiv$ _____ (mod 5)

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \equiv$ _____ (mod 5)

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \equiv$ _____ (mod 5)

2. Was fällt dir auf? Probiere ähnliche Rechnungen mit anderen Zahlen aus und beschreibe deine Beobachtungen.

3. Die Ergebnisse unterscheiden sich von den Ergebnissen ähnlicher Rechnungen in Uhrenland.

Du reist weiter durch andere Länder: nach Zweierland, Dreierland, Viererland usw.
In welchen Ländern sehen die Ergebnisse genauso aus wie im Fünferland?
Was haben diese Länder gemeinsam? Beschreibe deine Beobachtungen.

KV 1:

Tipp 1

Du kannst dir das Rechnen vereinfachen, wenn du die Ergebnisse weiterverwendest:
Weil $9 \cdot 9 \equiv 9$, kannst du ersetzen: $9 \cdot 9 \cdot 9 \equiv \mathbf{(9 \cdot 9)} \cdot 9 \equiv \mathbf{9} \cdot 9 \equiv 9$.

KV 1:

Tipp 2

Probiere nacheinander alle Zahlen zwischen 0 und 11 aus, z. B. für 5:
$5 \cdot 5 \equiv \ldots$ $5 \cdot 5 \cdot 5 \equiv \ldots$ $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \equiv \ldots$ Ist die Regelmäßigkeit immer gleich?

KV 2, Aufgabe 1:

Tipp 1

Rechne wie in Uhrenland, wobei dich der Rest beim Teilen durch 5 (statt 12) interessiert.
Deine Ergebnisse müssen zwischen 0 und 4 liegen.

KV 2, Aufgabe 2:

Tipp 1

Betrachte die Ergebnisse in einer Zeile oder Spalte.
Welche Ergebnisse findest du besonders bemerkenswert?

KV 3, Aufgabe 1:

Tipp 1

Vergleiche die Ergebnisse, wenn du 5-mal die gleiche Zahl multiplizierst:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, … Fällt dir eine Regelmäßigkeit auf?

KV 3, Aufgabe 2:

Tipp 1

Findest du diese Regelmäßigkeit auch in anderen Ländern?
Zum Beispiel: Was ist $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^7 \pmod 7$ oder $4^{11} \pmod{11}$?

Geometrische Zerlegungen

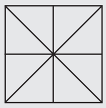
Klassenstufen: 5–6 **Mathematische Leitidee:** Raum und Form

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Förderung von Kompetenzen im flexiblen und kreativen Zeichnen ebener Figuren
- Erkennen, Nutzen und Transfer von Eigenschaften ebener Figuren und von geometrischen Mustern
- Förderung von Wahrnehmungskompetenzen und des räumlichen Vorstellungsvermögens

Lernmaterialien: **Zeit:** 45 Minuten
- Kopiervorlage 1
- Tippseite
- Zeichengeräte (Bleistifte, Dreiecke, Lineale für alle SuS, alternativ: Zeichenprogramm auf dem Computer)
- ggf. 27 Würfel in zwei verschiedenen Farben

Empfehlungen zum Ablauf:

Die Aufgaben zu „Geometrischen Zerlegungen“ eignen sich zum operativen Üben im Zeichnen ebener Figuren unter Nutzung von Eigenschaften von Rechtecken, Quadraten und Dreiecken und zugleich im räumlichen Wahrnehmen und Vorstellen. Das Lösen der Aufgaben kann demgemäß in Form einer Übungsstunde umgesetzt werden und hierbei die Aufgabe 3 als Zusatzaufgabe für sehr leistungsstarke Kinder eingesetzt werden.

Phase	Inhalt	Sozialform/Material
Einstieg 5 min	Die L präsentiert folgende Figur an der Tafel:  Frage: *Wie viele verschiedene Quadrate und Dreiecke erkennst du in der Figur?* Die SuS lösen die Aufgabe (5 Quadrate und 16 Dreiecke) Weiterführende Fragen: *Welche Form haben die Dreiecke?* (rechtwinklig, gleichschenklig) *Welche Größe haben die Dreiecke?* (4 Dreiecke sind halb so groß wie das Quadrat, 4 Dreiecke sind ein Viertel so groß wie das Quadrat) Die L stellt die Aufgaben für die Forscherphase vor. Dabei kann der spielerische Reiz der Aufgaben (Suche nach bzw. „Verstecken“ von Einzelfiguren in einer Gesamtfigur) herausgestellt werden, um die SuS zusätzlich zu motivieren.	Plenum
Forscherphase 20 min	Die SuS bearbeiten die Aufgaben selbstständig und bestimmen selbst über die Nutzung von Zeichengerät oder ggf. Zeichenprogramm am Computer (wie z. B. KV 3), die Wahl und Darstellung von Lösungswegen, sowie die soziale Lernform. Die Aufgabe 3 in Abhängigkeit von der Zeit als Zusatzaufgabe für schnelle Aufgabenlöser einsetzen.	Einzel-/Partner-/ Gruppenarbeit KV 1 ggf. Tippseite Zeichengeräte ggf. Würfel
Auswertung 10 min	Einige SuS präsentieren ihre Ergebnisse an der Tafel oder auf ihren KV. Dabei sollten sie auch ihre jeweiligen Vorgehensweisen beschreiben und mithilfe der Definitionen oder Eigenschaften von Rechtecken, Quadraten und Dreiecken begründen. Die Lösung von Aufgabe 3 kann mit Würfeln dargestellt werden.	Plenum ggf. Würfel

Geometrische Zerlegungen

1. Zerlege dieses Rechteck in …

a) … 7 Quadrate.

b) … 13 Quadrate.

c) Wie viele Quadrate entdeckst du jeweils **insgesamt** in deiner Lösungsfigur?

Lösungsfigur von a): _____ Quadrate Lösungsfigur von b): _____ Quadrate

2. Zerlege das Quadrat in gleichschenklige, aber nicht rechtwinklige Dreiecke.

a) in 8 Dreiecke

b) in 12 Dreiecke

3. Aus 27 gleich großen Würfeln, die schwarz oder weiß sind, setzt Paul einen großen Würfel zusammen. Wie viele schwarze und wie viele weiße Würfel muss er verwenden, wenn die Seitenflächen des großen Würfels wie ein Schachbrett gefärbt sein sollen?