Inhaltsverzeichnis

Die Lösungen zu den Aufgabenfeldern finden Sie im digitalen Zusatzmaterial.

LemaS LEISTUNG macht SCHULE

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Dieses Buch wurde vom BMBF-geförderten Forschungsverbund „Leistung macht Schule“ (LemaS) im Rahmen des gleichnamigen Projekts der gemeinsamen Initiative von Bund und Ländern zur Förderung leistungsstarker und potenziell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler entwickelt. Es soll Lehrerinnen und Lehrer beim Fördern von Potenzialen und Leistungsstärken im regulären Mathematikunterricht unterstützen.

„Es macht Spaß und man lernt, wie viel man kann!“
Feedback einer Schülerin der Maria-Montessori-Gesamtschule Aachen nach dem Einsatz eines Aufgabenfeldes im Unterricht

Liebe Lehrerin, lieber Lehrer,

seit 2018 entwickeln Lehrkräfte aus 300 Schulen aller Bundesländer gemeinsam mit Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern aus verschiedenen pädagogischen Disziplinen in der Bund-Länder-Initiative „Leistung macht Schule“ (LemaS) innovative Konzepte für die Förderung leistungsstarker und potenziell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler. Die Begabungsförderung wird dabei als integrativer Bestandteil der Breitenförderung verstanden: Es geht um die bestmögliche Förderung *aller* Kinder und Jugendlicher. Ein Schwerpunkt des LemaS-Projektes bezieht sich auf den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, für den es wiederum Teilprojekte für jedes MINT-Fach gibt. An den zugehörigen Mathematik-Teilprojekten wirken Lehrkräfte aus ca. 80 Schulen und wir als Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker mit. Nach unseren ersten Schulbesuchen zogen wir ein (nicht unerwartetes) Fazit: Es gibt viele Lehrkräfte, die seit Jahren äußerst engagiert und kreativ in ihrem täglichen Mathematikunterricht Aufgabenformate für ein aktiv-entdeckendes und zugleich differenzierendes Lernen erfolgreich einsetzen. Wir trafen aber ebenso auf Lehrkräfte, die diesbezüglich noch unsicher waren, die eher den Schwerpunkt auf ein intensives Üben von Grundfähigkeiten im Unterricht setzten oder die sich von den vielfältigen Herausforderungen des Schulalltags überfordert fühlten und uns und dem LemaS-Projekt gegenüber eine abwartende Position einnahmen. Aus dieser gemischten Ausgangslage entstand die Idee eines Aufgabenwettbewerbs: Jede an einem Mathematikprojekt teilnehmende „LemaS-Schule“ entwickelt (mindestens) eine offene substanzielle Aufgabe für den Regelunterricht, ggf. mit regionalen Sachbezügen. Der Wettbewerb bot somit zum einen den Lehrkräften, die bereits vielfältige Erfahrungen im Entwickeln innovativer Aufgaben besaßen, die Möglichkeit, ihre Expertise einzubringen. Zum anderen wurden bisher eher zögerliche Lehrkräfte motiviert, zumindest exemplarisch Neues auszuprobieren. Demgemäß stieß der Wettbewerb auf eine rege Resonanz unter zahlreichen Lehrkräften, die uns einen „bunten Strauß“ schöner Aufgaben bzw. Aufgabenfelder zuschickten. Eine Jury prämierte die besten eingesendeten Aufgaben auf der Basis von Bewertungskriterien, die sich an den in der Bund-Länder-Initiative fokussierten „Lernphilosophie“ orientierten und die allen Lehrkräften transparent mitgeteilt wurden (siehe Seite 8).

Jurymitglieder aus Schulen

- *Birgit Lehfeldt*, Lerncoach und Lerntrainerin, tätig an der Anne-Frank-Schule Bargteheide
- *Susanne Weiß*, Schulleiterin des Ausonius-Gymnasiums Kirchberg
- *Dirk Schnitzler*, Schulleiter der Albert-Schweitzer-Grundschule Schwerte

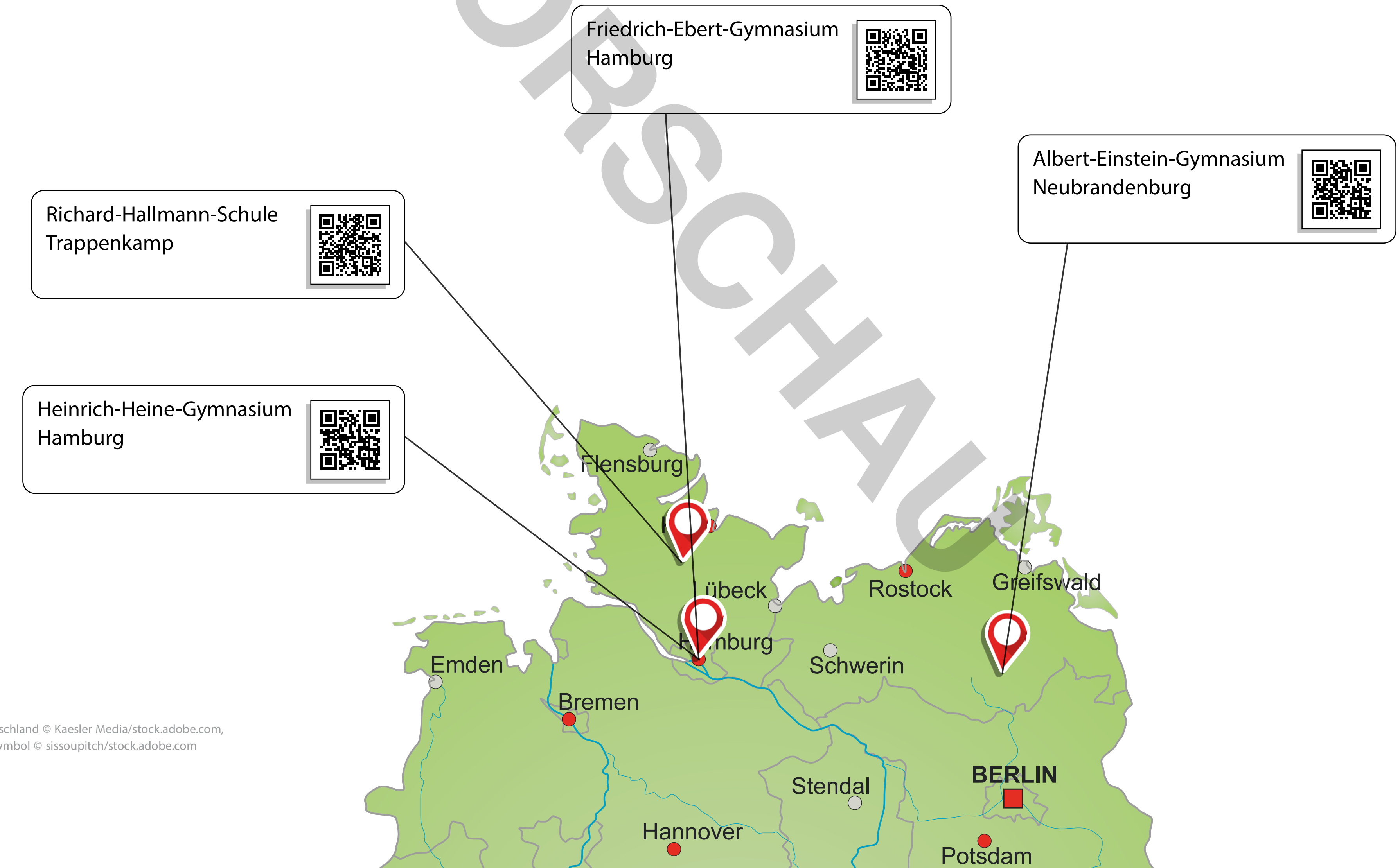
aus der Wissenschaft

- Dr. *Mandy Fuchs*, Universität Münster, Koordinatorin der Mathematikteilprojekte in „LemaS“
- Prof. Dr. *Ralf Benölken*, Universität Wuppertal und Leiter des Teilprojektes 8 in „LemaS“
- Prof. Dr. *Friedhelm Käpnick*, Universität Münster, Leiter der Teilprojekte 3 und 8 in „LemaS“

Für diese Lernphilosophie sind aktiv-entdeckendes bzw. forschendes Lernen und die hiermit verbundene „natürliche Differenzierung“ vom Lernenden und vom Fach aus prägend. Das bedeutet, dass die Aufgaben spannende mathematische Themen aufgreifen, somit die Neugier aller Lernenden wecken und sie zum kreativ-spielerischen und entdeckenden Lernen motivieren. Dies ist dadurch gewährleistet, dass alle, auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler, zumindest die Einstiegsaufgaben oder Teile der offenen Aufgaben erfolgreich bearbeiten können. Dass solche Forscherstunden sehr erfolgreich in den regulären Unterricht integriert werden können, belegen die Erprobungen zu den Aufgaben und spiegelt sich im Einstiegszitat wider. Übereinstimmend hiermit zeigen unsere einschlägigen Erfahrungen im LemaS-Projekt auf, dass vorher oft skeptische Lehrkräfte beim Einsatz der Aufgaben erfuhren, dass das forschende Lernen nicht nur besonders begabte, sondern prinzipiell alle Lernenden motiviert und den Mathematikunterricht sowohl inhaltlich als auch methodisch bereichert. Da die Aufgaben, wie schon erwähnt, offen und inhaltlich eng miteinander verknüpft ein

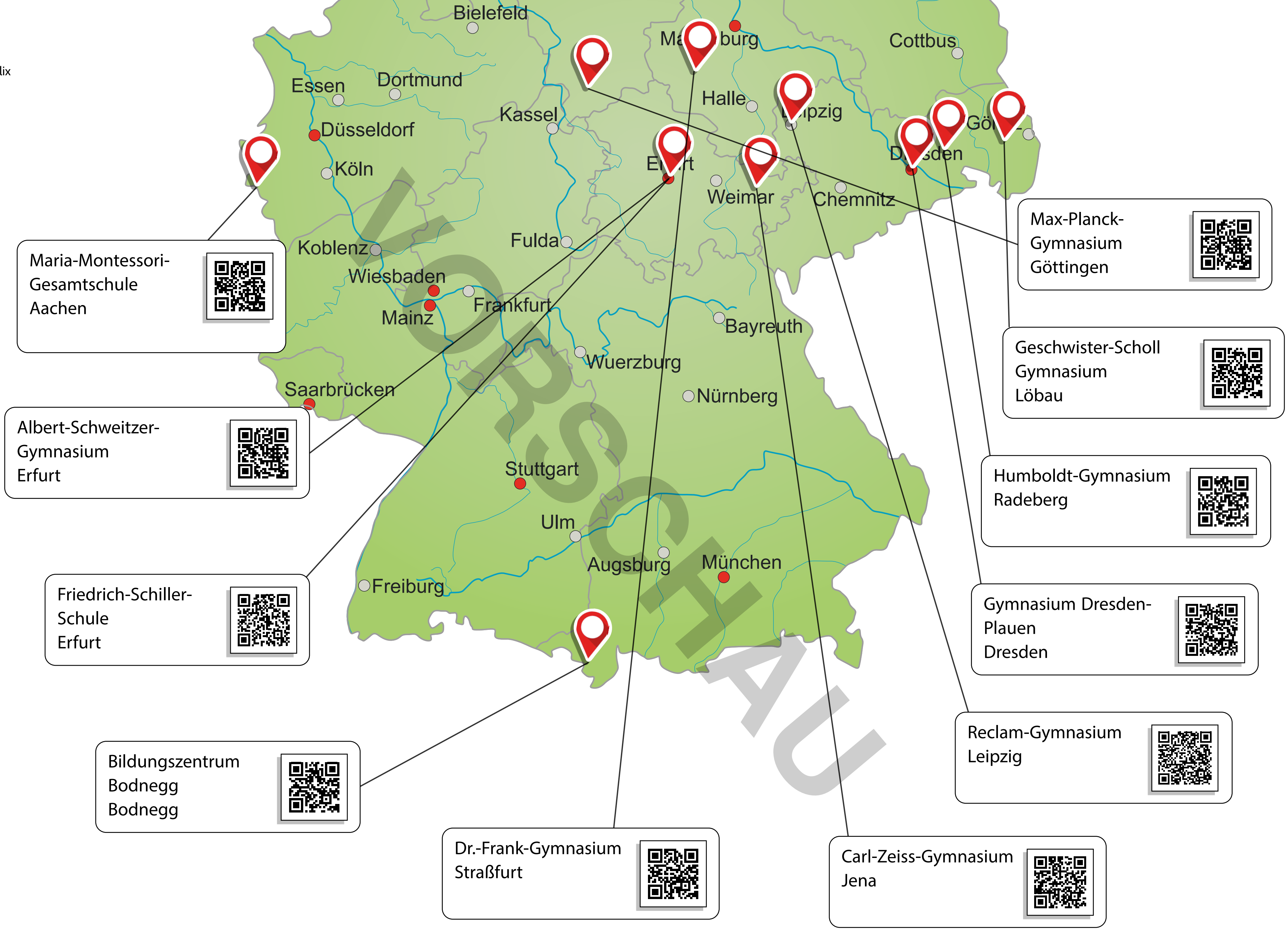
…ie beteiligten Schulen

Weitere Informationen zu den beteiligten Schulen erhalten Sie über deren Internetseiten, die Sie durch das Scannen der QR-Codes erreichen.



…Deutschland © Kaesler Media/stock.adobe.com,
…ort Symbol © sissoupitch/stock.adobe.com

…olix


Bielefeld
Essen
Dortmund
Düsseldorf
Köln
Kassel
Magdeburg
Halle
Leipzig
Cottbus
Erfurt
Weimar
Chemnitz
Dresden
Koblenz
Fulda
Wiesbaden
Mainz
Frankfurt
Bayreuth
Wuerzburg
Nürnberg
Saarbrücken
Stuttgart
Ulm
Augsburg
München
Freiburg
Maria-Montessori-Gesamtschule Aachen
Albert-Schweitzer-Gymnasium Erfurt
Friedrich-Schiller-Schule Erfurt
Bildungszentrum Bodnegg Bodnegg
Dr.-Frank-Gymnasium Straßfurt
Carl-Zeiss-Gymnasium Jena
Reclam-Gymnasium Leipzig
Gymnasium Dresden-Plauen Dresden
Humboldt-Gymnasium Radeberg
Geschwister-Scholl Gymnasium Löbau
Max-Planck-Gymnasium Göttingen
VORSCHAU

Bewertungskriterien für die Aufgabenfelder

Die Jury des Aufgabenwettbewerbs einigte sich auf folgendes Bewertungsraster, das allen Lehrkräften vor Beginn der Entwicklung der Aufgabenfelder transparent mitgeteilt wurde.

	3 Punkte	*2 Punkte*	*1 Punkt*	*0 Punkte*
1. Vollständigkeit der Angaben zur Aufgabe				
Inhaltliche Schwerpunkte				
Hinweise zu Lernmaterialien				
Methodische Empfehlungen				
Aufgabenblatt				
Lösungshinweise				
Literaturhinweise				
2. Berücksichtigung der generellen Anforderungen an die Aufgabe				
Vorgabe eines motivierenden, leicht verständlichen (Ausgangs-)Problems				
Realistische Chancen für alle Kinder, erfolgreich zu lernen				
Reichhaltige mathematische Substanz				
Offenheit bzgl. der Wahl von Lösungswegen, von Lernmitteln, der Organisationsform, der Lösungsdarstellung				
Möglichkeiten zum Mathematiktreiben (Finden von Anschlussproblemen)				
3. Inhalt der Aufgabe				
Originalität der Aufgabe				
Regionaler Bezug der Aufgabe				
Bezug zu mathematischen Prozesszielen				
Praxistauglichkeit der Aufgaben für den Regelunterricht				
4. Präsentation der Aufgabe				
Qualität des Aufgabenblattes (Ästhetik, Tipps für Lernende, sinnvolle Zusatzinformationen, Materialhinweise)				
5. Methodische Empfehlung und Lösungshinweise				
Qualität der methodischen Empfehlungen				
Qualität der Lösungshinweise				
Originalität der authentischen Schülerlösung				
Gesamtpunktzahl				

* Die dunkel gefärbten Felder können nicht angekreuzt werden, um eine ausgewogene und den Vorgaben entsprechende faire Bewertung zu gewährleisten.

Hinweise zur Nutzung der Aufgabenfelder

Die Aufgabenmaterialien sind jeweils als ganze Unterrichtsstunden bzw. Doppelstunden für alle Schülerinnen und Schüler (SuS) einer Klasse konzipiert. Die auf spannende, innermathematische Entdeckungen oder auf interessante, vielfältige Sachthemen bezogenen Aufgabenfelder lassen sich jeweils konkreten Klassenstufen und Hauptinhaltsbereichen des Mathematikunterrichts zuordnen. Demgemäß können Lehrkräfte – um sich schnell orientieren zu können – diese Angaben an zentralen Stellen für alle Aufgabenfelder entnehmen. Da die Aufgaben bewusst sehr komplex und offen sind, können sie gemäß den jeweiligen Schwerpunktsetzungen variabel in den Unterricht integriert werden – auch in den jeweils angegebenen verschiedenen Klassenstufen.

Die Zuordnung der Aufgabenfelder nach den mathematischen Leitideen entspricht der Struktur der Bildungsstandards für den Mathematikunterricht und erleichtert somit die Orientierung an aktuellen schulischen Leitbildern.

Mathematische Leitideen

- Zahl und Operation
- Raum und Form
- Größen und Messen
- Daten und Zufall
- Strukturen und funktionaler Zusammenhang

Die didaktisch-methodische Aufbereitung aller Aufgabenmaterialien basiert, wie bereits im Vorwort genannt, auf dem Prinzip des aktiv-entdeckenden bzw. forschenden Lernens und auf der hiermit verbundenen natürlichen Differenzierung vom Kind und vom Fach aus. Das bedeutet, dass alle, auch leistungsschwächere SuS, selbstbestimmt erfolgreich lernen können.

Beim Einsatz der Aufgabenfelder ist aus didaktisch-methodischer Sicht generell wichtig: Alle Lernenden können die offenen Aufgaben gemäß ihren Voraussetzungen bearbeiten und dabei selbst bestimmen, welche Lösungswege sie gehen und wie sie ihre Ergebnisse darstellen. Lehrkräfte können zudem in Abhängigkeit von ihren Zielen sowie ihren schulischen Rahmenbedingungen den Einsatz der Materialien anpassen. So können z. B. die vorgegebenen Aufgaben vom Umfang her reduziert, Aufgabentexte und grafische Darstellungen vom Schwierigkeitsgrad her geändert und somit den individuellen Lernniveaus angepasst werden. Hierzu könnten Zahlen bzw. Größenangaben verändert, Zusatzinformationen ergänzt, Sachtexte an regionale Kontexte angepasst oder Texte gekürzt werden.

Zu jedem Aufgabenfeld gibt es zwei Übersichtsseiten, die Informationen zur Ideenfindung und zur Umsetzung der Aufgaben durch die Autorinnen und Autoren, ebenso inhaltliche Schwerpunkte, benötigte Materialien und Empfehlungen zum Ablauf einer Stunde enthalten. Es folgen die Kopiervorlagen für die SuS sowie eine Tippseite mit konkreten Tipps zur Bearbeitung der Aufgaben. Die Tippseiten sind so gestaltet, dass sie z. B. zwischen zwei leere Seiten in eine Klarsichthülle gesteckt und von den Lernenden stückweise herausgezogen werden können. Auf diese Weise sehen die SuS immer nur den nächsten Tipp und es wird ihnen nicht zu viel vorgegeben. In diesem Sinne verstehen wir das Nutzen der Tippkarten als „Hilfe zur Selbsthilfe“ und als Möglichkeit, die Selbstkompetenzen von SuS zu fördern.

Die Lösungshinweise im digitalen Zusatzmaterial bieten Musterlösungen und Vorschläge für Lösungswege. An vielen Stellen belegen authentische Schülerlösungen, wie kreativ die Lernenden Lösungen ermittelten. Zudem enthalten einige Lösungshinweise Anregungen für Anschlussprobleme. Schließlich noch eine generelle Empfehlung für Lehrkräfte: Wie Sie wissen, kann man Unterricht nicht auf dem Reißbrett planen und durchführen. Lassen Sie also beim Einsatz der Aufgaben der eigendynamischen Entwicklung von Lernprozessen einen ausreichenden Spielraum!

Treffpunkte für drei Freunde

Hilda, Carl und Adam wollen sich nach langer Zeit endlich wiedersehen.
Sie wohnen aber in drei verschiedenen Städten.

Bedingung

Die drei Freunde beschließen, dass die Luftlinie zwischen ihrem Treffpunkt und dem eigenen Wohnort immer die gleiche Länge haben muss.

Kartendaten © 2023 GeoBasis-DE/BKG (©2009), Google

20 km

Treffpunkte für drei Freunde

Löse die folgenden Aufgaben mithilfe der Karte von der Kopiervorlage 1.
Achte darauf, dass die Wege stets gleich lang sein sollen.

1. Lege in der Karte ein möglichst sinnvolles Koordinatensystem fest.

Gib die Koordinaten der Punkte **D**, **L** und **C** für die Städte Dresden, Leipzig und Chemnitz an.

2. Da Adam leider keine Zeit hat, treffen sich zuerst nur Hilda und Carl.

Trage drei Orte ein, an denen sich die beiden treffen könnten.

Gib die Länge der Strecke in Kilometern an.

3. Nun hat Hilda keine Zeit, sodass sich nur Carl und Adam treffen können.

Ermittle drei Orte für dieses Vorhaben.

Begründe, dass alle Standorte, die von zwei Wohnorten den gleichen Abstand haben, auf einer Geraden liegen müssen. Benenne diese spezielle Gerade.

4. Zum Glück haben nun doch alle drei Freunde Zeit.

Finde einen Ort, der von allen drei Wohnorten den gleichen Abstand hat.

a) Trage in der Karte einen Ort ein, von dem du schätzt, dass er von allen drei Städten gleich weit entfernt ist.

b) Ermittle durch Falten des Papiers, welcher Ort das sein muss.

Gib dessen Namen und Koordinaten an. (Nutze dein Wissen aus Aufgabe 2 und 3.)

c) Überprüfe mithilfe eines Zirkels, ob der ermittelte Treffpunkt von allen drei Städten den gleichen Abstand hat. Gib diese Entfernung in Kilometern an.

d) Gib eine Konstruktionsbeschreibung an, um diesen Treffpunkt ohne Falten zu ermitteln.

5. Zeige durch Konstruktion, dass sich drei Kinder, die in Colditz, Altenberg und Kamenz wohnen, in Meißen treffen sollten und sich dort das weltberühmte Porzellan ansehen könnten.

6. Kann man mit der angewendeten Vorgehensweise auch einen Treffpunkt zwischen weiter entfernten Städten, wie Brasilia, London und Sydney, ermitteln?

Begründe deine Antwort.

Linktipps:
Entfernungsrechner „Luftlinie.org“
„GeoGebra“

Zusatzaufgabe

Recherchiere, welche berühmten Mathematikerinnen und Mathematiker mit gleichen Vornamen sich hinter den drei Freunden Hilda, Carl und Adam verstecken könnten und welche besonderen Entdeckungen sie gemacht haben.

KV 2, Aufgabe 1:

Tipp 1
Orientiere dich am angegebenen Maßstab unter der Karte.
Oder: Nutze den Maßstab unter der Karte als Skaleneinteilung.

STOP STOP STOP

KV 2, Aufgabe 2:

Tipp 2
Überlege dir, welche Orte auf einer direkten Verbindung der beiden Wohnorte liegen.
Recherchiere, wie weit der Treffpunkt vom jeweiligen Wohnort entfernt ist.

STOP STOP STOP

KV 2, Aufgabe 3:

Tipp 3
Zeichne die direkte Verbindung zwischen den beiden Wohnorten ein. Suche nun verschiedene Treffpunkte, die nicht auf der direkten Verbindung liegen, sodass beide den gleichen Weg zum Treffpunkt zurücklegen müssen.

STOP STOP STOP

KV 2, Aufgabe 4:

Tipp 4
In Aufgabe 3 hast du erkannt, dass die Orte auf der Mittelsenkrechten zwischen zwei Orten liegen müssen. Wende dieses Wissen nun auf drei Städte an.

Beachte: Es muss nicht nur eine Mittelsenkrechte sein.
Berücksichtige beim Falten, dass die Mittelsenkrechte senkrecht zur Strecke steht.

STOP STOP STOP

KV 2, Aufgabe 5:

Tipp 5
Verbinde die Punkte der drei Städte auf der Karte miteinander und konstruiere die Mittelsenkrechten.

Tippseite ggf. zwischen zwei leere Seiten in eine Klarsichthülle stecken, sodass die SuS sie stückweise herausziehen können.

Isabel Ravlić, Johanna Mengersen,
Stephan Kruber

Heinrich-Heine-Gymnasium
Hamburg

Hamburg: Tor zur Welt am 10. Längengrad

Hamburg, das sprichwörtliche „Tor zur Welt“, verbinden wir üblicherweise mit dem Hamburger Hafen, von wo aus täglich Schiffe zu ihren Fahrten in die weite Welt hinaus aufbrechen. Die Autorinnen und der Autor des Heinrich-Heine-Gymnasiums betrachten dieses Tor aus einem anderen Blickwinkel. Sie haben die Redewendung auf das geografische Koordinatensystem der Erde bezogen und ein mathematisches Aufgabenfeld mit fächerübergreifenden Bezügen entwickelt.

Klassenstufen: 7–9

Mathematische Leitideen: Zahl und Operation, Größen und Messen, Daten und Zufall, funktionaler Zusammenhang

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Entwickeln und flexibles Anwenden von Schätz- und Strukturstrategien
- Erkennen, Beschreiben, Argumentieren bzw. Begründen rechnerischer Zusammenhänge, einschließlich formelmäßiger Beziehungen
- Entwickeln übersichtlicher Darstellungen von komplexen mathematischen Inhalten
- Lösen von Problemaufgaben und hierbei Entwickeln und Anwenden heuristischer Lösungsstrategien beim Problemlösen (zum Beispiel Zerlegen einer komplexen Aufgabe in Teilaufgaben, Verwenden von Tabellen oder grafischen Darstellungen)

Fächerübergreifende Lernthemen:
- Bezüge zur Regionalgeschichte und zur Geografie

Lernmaterialien:

Zeit: 90 Minuten

- Kopiervorlagen 1 und 2
- Taschenrechner
- Tippseite
- Stifte und Papier, Bindfäden von ca. 15 cm Länge in Klassenstärke
- Computer mit Internetzugang, Fotos von Hamburg,
- Globus und ggf. Atlas

Didaktisch-methodische Empfehlungen:

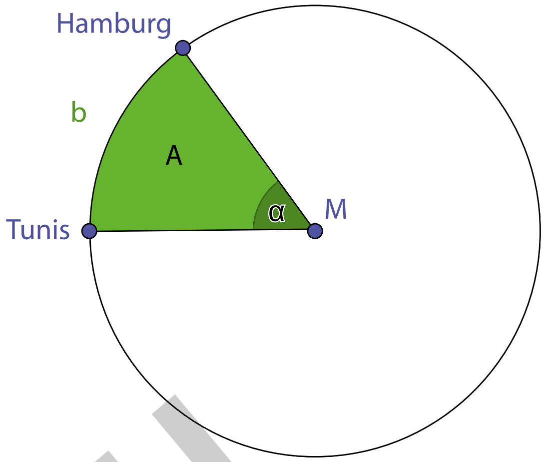
Das Aufgabenfeld kann flexibel im Rahmen von einer Forscher- bzw. Anwendungsstunde im Mathematikunterricht eingesetzt werden. Ein differenzierendes und selbstgesteuertes Lernen der SuS ergibt sich vor allem durch eine freie Wahl der Lösungswege und -darstellungen, ebenso der Nutzung von Hilfsmitteln und der sozialen Lernform.
Voraussetzung für ein erfolgreiches Bearbeiten der Forscheraufgaben sind grundlegende Kompetenzen zum Lernthema „Kreis“ (Begriffe, Flächeninhalts-, Umfangs-, Kreisausschnitts-, Kreisbogenberechnungen) und im kalkülmäßigen Lösen von Gleichungen.

Empfehlungen für den Ablauf der Forscherstunde:

Phase	Inhalt	Material/ Sozialform
Einstieg 15 min	Anhand der KV 1 und unter Nutzung eines Globus (oder einer Internetpräsentation) sowie von Fotos zu Hamburg gemeinsam das geografische Koordinatensystem der Erde erläutern. Alternativ können einige SuS hierzu auch einen Kurzvortrag halten. Anschließend beschreibt die L die Hauptinhalte der Stunde. Dann lösen die SuS die Aufgabe 1 von KV 1. Bei den Entfernungsangaben (KV 1 und KV 2) bietet es sich an, dass die SuS diese zunächst schätzen. Die Ergebnisauswertung, die auch ein Reflektieren über angewendete Schätzstrategien beinhalten sollte, erfolgt im Plenum. Beim Lückentext kann die L in Abhängigkeit von den Vorkenntnissen der SuS den Schwierigkeitsgrad variieren und die KV mit oder ohne Wortbank in der Fußnote kopieren.	Plenum Einzel- oder Partnerarbeit KV 1, Globus, Internet, Fotos von Hamburg
Forscherphase 45 min	Die SuS bearbeiten die Forscheraufgaben der KV 2. Sie können frei über die soziale Lernform, Lösungswege sowie Lernmaterialien entscheiden. Es empfiehlt sich, dass die Aufgaben in der vorgegebenen Reihenfolge gelöst werden. Bei Bedarf können SuS die Tippseite für einzelne Aufgaben nutzen. Gegebenenfalls könnte die Forscherphase auch durch Zwischenauswertungen (zum Beispiel einen Vergleich der Lösungen zu den Stufen 1 und 2) unterbrochen werden. Mögliche Zusatzaufgabe: Nutze die geografischen Koordinaten deines Heimatortes aus KV 1 und stelle die Aufgabenstellungen aus 1 und 3 entsprechend um. Notiere dir ggf. auftretende Schwierigkeiten.	Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit KV 2 Taschenrechner, Internet, Tippseite
Präsentation und Auswertung 15 min	Einige SuS bzw. Gruppen präsentieren die Ergebnisse ihrer Aufgaben und erklären jeweils ihre Lösungsstrategien. Wichtig ist, im gemeinsamen Gespräch die Vielfalt der Herangehensweisen der SuS zu diskutieren, zu vergleichen und zu würdigen Die Formeln zur Berechnung der Bogenlänge und des Flächeninhaltes werden als Merksatz präsentiert und von den SuS übernommen. Gemeinsam wird diskutiert, wie es zu den Abweichungen der berechneten Entfernung und der im Internet recherchierten kommt.	Plenum Lösungen:
Übung 15 min	Das Umstellen der Formeln wird anhand konkreter Beispiele thematisiert. Der Umgang mit der Formel wird an anderen Beispielen (einfache Rechenaufgaben, Textaufgaben) geübt. Die SuS können sich hierzu selbst Aufgaben mithilfe eines Atlanten oder des Internets stellen und diese lösen.	Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit Taschenrechner, Atlas, Internet

Von Hamburg bis Tunis

1. Berechne die Entfernung (in km) zwischen Hamburg und Tunis (34° nördlicher Breite), wenn man entlang des 10. Längengrades fährt.



INFO

Der Erdradius beträgt ca. 6 371 km.

2. Leite eine Formel zur Berechnung der Bogenlänge b her.

3. Übertrage deine Ergebnisse auf die Berechnung des Flächeninhalts des Kreisausschnitts A.

4. Recherchiere die Entfernung zwischen Hamburg und Tunis im Internet. Erläutere, warum die Entfernung hier anders ist als in Aufgabe 1.

5. Du warst sehr schnell? Suche dir einen anderen Ort aus und recherchiere im Internet die Entfernung zwischen diesem Ort und Tunis.