Vermischte Übungen aus Analysis: Flugbahn einer Rakete, Volumen eines Fasses und andere Aufgaben

Alfred Müller

Dieser bunte Mix aus Übungsaufgaben deckt ein breites Spektrum der Analysis ab. Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die Flugbahn einer Rakete, berechnen das Volumen eines Fasses und nähern den Schnittpunkt zweier Graphen mit dem Newton-Verfahren an. Auch das Bilden einer Umkehrfunktion ist Teil einer Aufgabe. Darüber hinaus interpretieren die Lernenden, welcher Funktionsgraph zu einer Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften gehören könnte, und führen Kurvendiskussionen zu vorgegebenen Funktionen durch. Quadratische Funktionen, die Kreise und Ellipsen ergeben, sind ebenso Teil der Aufgaben wie Logarithmen und Exponentialfunktionen.

Vermischte Übungen aus Analysis: Flugbahn einer Rakete, Volumen eines Fasses und andere Aufgaben

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihr Wissen über Funktionen und Funktionsgleichungen sowie über Differenzial- und Integralrechnung anzuwenden. Sie führen Kurvendiskussionen durch, bestimmen Extremwerte, interpretieren Graphen und wenden das Newton-Verfahren an.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **BA** Bildanalyse

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Rationale Funktion	M1–M4	AB
Wurzelfunktion	M1, M3	AB
Kreis und Ellipse	M1	AB
Rotationskörper	M1, M3	AB
Limesbildung	M2	AB
Polynomdivision	M3	AB
Graphen interpretieren	M3	AB, BA
Exponentialfunktion	M4	AB
Logarithmus	M4	AB
Newton-Verfahren	M4	AB
Umkehrfunktion	M4	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Rationale Funktion, Wurzelfunktion, Exponentialfunktion, Logarithmus, Kurvendiskussion, Extremwertbestimmung, Kreis, Ellipse, Rotationskörper, Limes, Polynomdivision, Interpretation von Graphen, Newton-Verfahren, Umkehrfunktion

Medien: GTR/CAS, Formelsammlung

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Exponentialfunktion, Logarithmus und Newton-Verfahren M4

1.

a) Begründen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = \cos x - e^{-\frac{1}{2}x}$ für x < 0 keine Nullstellen haben kann.

b) Der Graph G_h der Funktion h mit $h(x) = 2 - 3e^{-2x}$ die Geraden mit den Gleichungen x = 2 bzw. y = 2 sowie die y-Achse schließen eine Fläche A ein. Stellen Sie deren Inhalt in einer Skizze dar und berechnen Sie ihn.

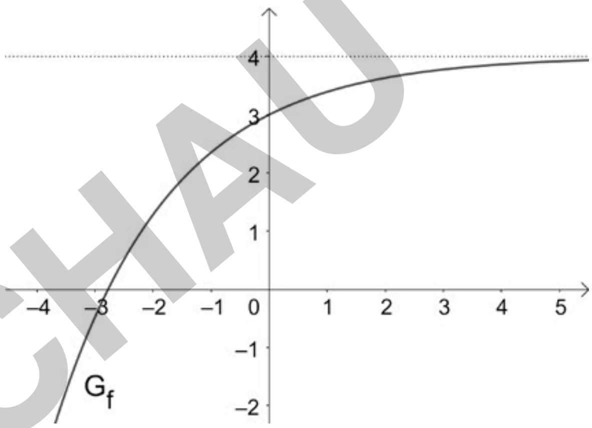
c) Gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = e^{-\frac{1}{4}x}$, $D_k = \mathbb{R}$. Welchen Prozentsatz des Funktionswertes $k(x)$ beträgt $k(x+4)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$?

2.

a) Die nebenstehende Abbildung ist der Graph G_f der Funktion

$f(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + b$.

Bestimmen Sie die Parameter a und b. Berechnen Sie dann den Inhalt der Fläche A, den die Gerade $y = -x + 3$ mit der x-Achse und dem Graphen G_f einschließt.



Grafik: Günter Gerstbrein

b) Die Parabel p mit der Gleichung $y = p(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3$ schneidet den Graphen G_f im Punkt $S_1(0|3)$ und in einem weiteren Punkt S_2. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S_2 mithilfe des Näherungsverfahrens von Newton.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(e - x)$ mit $D_f = D_{max}$ und Graphen G_f.

a) Bestimmen Sie D_f und zeigen Sie, dass f in D_f streng monoton abnehmend ist.

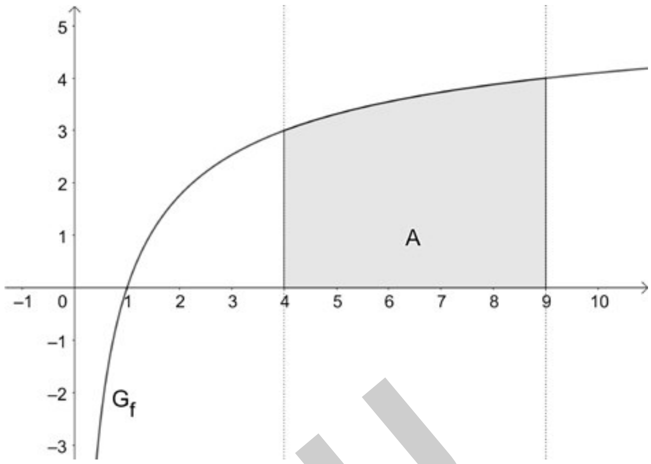
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen, die Gleichung der Tangente t im Schnittpunkt mit der y-Achse sowie die Gleichung der Asymptote.

c) Zeichnen Sie den Graphen G_f und die Tangente t im Intervall $I = [-3;3]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

d) Begründen Sie, dass die Funktion f in D_f umkehrbar ist und bestimmen Sie die Gleichung $y = f^{-1}(x)$ sowie deren Ableitung $(f^{-1})'(x)$.
Skizzieren Sie dann den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} in das bei Teilaufgabe c) angelegte Koordinatensystem.

Aufgabe 2

$f(x) = 6 - \frac{6}{\sqrt{x}}$



Grafik: Günter Gerstbrein

a) Graph G_f nebenstehend dargestellt

b) Flächenberechnung:

$$A = \int_4^9 \left(6 - \frac{6}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[6x - 12\sqrt{x}\right]_4^9$$

$$= 54 - 36 - 24 + 24 = 18\,\text{FE}$$

c) Volumenberechnung:

$$V = \pi \int_4^9 \left(6 - \frac{6}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_4^9 \left(36 - \frac{72}{\sqrt{x}} + \frac{36}{x}\right) dx$$

$$= 36\pi \int_4^9 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= 36\pi \left[x - 4\sqrt{x} + \ln|x|\right]_4^9$$

$$= 36\pi (9 - 12 + \ln 9 - 4 + 8 - \ln 4)$$

$$= 36\pi \left(1 + \ln\frac{9}{4}\right) \approx 204{,}81\,\text{VE}$$

Aufgabe 3

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aus der Zeichnung ist ersichtlich: $b = 24$

$P(40|20)$ eingesetzt:

$$\frac{1600}{a^2} + \frac{400}{576} = 1 \Rightarrow \frac{1600}{a^2} = \frac{176}{576} \Rightarrow a^2 = \frac{1600 \cdot 576}{176} = \frac{100 \cdot 576}{11} \Rightarrow a \approx 72{,}36$$

Zur Berechnung des Volumens wird y^2 benötigt:

$$\frac{11x^2}{100 \cdot 576} + \frac{y^2}{576} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{57600 - 11x^2}{100}$$

Volumen des Fasses:

$$V = \pi \int_{-40}^{40} y^2 dx = 2\pi \int_0^{40} y^2 dx = 2\pi \left[576x - \frac{11x^3}{300}\right]_0^{40}$$

$$= 2\pi \cdot \left(23040 - \frac{7040}{3}\right) = 2\pi \cdot \frac{62080}{3} \approx 130020\,\text{cm}^3 = 130\,\text{dm}^3$$