Inhalt

KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg   Stationenlernen Quadratische Funktionen – Bestell-Nr. P12 926

Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

dieses Werk zum Stationenlernen im Mathematikunterricht soll Ihnen Ihre alltägliche Arbeit mit Quadratischen Funktionen erleichtern. Die Stationen eigenen sich ab Klasse 9 bei der Erarbeitung und Vertiefung des Themas Quadratische Funktionen, aber auch als Wiederholungsmaterial in späteren Klassen.

Der Themenkomplex wurde dazu in folgende Bereiche unterteilt:

A: Parabeln der Form $y = ax^2$

B: Parabeln der Form $y = ax^2 + bx + c$ – Grundlagen

C: Parabeln der Form $y = ax^2 + bx + c$ – Weiterführende Aufgaben

D: Vermischte Aufgaben

E: Geometrische Aufgaben

F: Funktionale Abhängigkeiten

G: Rätsel und Spiele

Ausführliche Erklärungen zum Aufbau des Buches

Stationen:
Die Aufgaben der einzelnen Stationen bauen thematisch aufeinander auf. Bei den Bereichen A, B, C, D werden einzelne Teilaspekte eingeübt, wohingegen bei den Stationen E und F das zuvor Erlernte in längeren Aufgaben verknüpft wird. Die Station G beinhaltet verschiedene Rätsel und Spiele. Diese können als Auflockerung während der Stationenarbeit oder dem Unterricht eingesetzt, aber auch ideal in Vertretungsstunden verwendet werden.

Differenzierung:
Jede Station besteht aus unterschiedlichen Aufgaben, welche den Niveaustufen: grundlegendes Niveau, mittleres Niveau und Expertenniveau zugeordnet werden können. Jede Station ist mit dem entsprechenden Symbol zur Einordnung gekennzeichnet:

⊙ = Grundlegendes Niveau: Grundlagen des Themenbereichs, Einübung standardisierter Lösungsverfahren

! = Mittleres Niveau: Vertiefung der Grundlagen

✶ = Expertenniveau: Transferwissen und weiterführende Aufgaben

Um den Schülern das Arbeiten zu erleichtern, befindet sich vor den Stationen ein kleiner Theorieteil. Dieser ist den jeweiligen Stationen, erkenntlich an dem zugehörigen Buchstaben (A–F), zugeordnet. Mit Hilfe dieses Skripts können die Schüler eigenverantwortlich die benötigten Lerninhalte nachlesen und sich selbstständig Hilfe holen. Der Theorieteil ist auch für Schüler als Zusammenfassung vor einer Lernstandserhebung oder als Lernhilfe bei verpasstem Unterricht auf Grund einer längeren Krankheit geeignet.

Lösungen:
Wer die Aufgabe der Schüler korrigiert, hängt zum einen von der Lerngruppe und zum anderen von den Vorlieben der unterrichtenden Lehrperson ab. So kann dieser die Verbesserung der Aufgaben selbst übernehmen oder die Schüler selbstverantwortlich korrigieren lassen.

Stationenlaufzettel:
Der Stationenlaufzettel ist so konzipiert, dass die Lehrkraft oder die Schüler die Stationsnummer und den Stationsbereich eintragen können. Die Jugendlichen haken dann auf dem Laufzettel ab, wenn sie eine Station erledigt haben, und setzen nach erfolgreicher Korrektur einen weiteren Haken.

Und nun wünschen Ihnen viel Spaß und Erfolg beim Einsatz der Materialien das Team des Kohl–Verlags und

Sabine Bundle

Stationen–Laufzettel

Name: ______________________ **Datum:** ______________________

Grundlegendes Niveau

Station	Stationsname	erledigt	korrigiert

! Mittleres Niveau

Station	Stationsname	erledigt	korrigiert

Erweitertes Niveau

Station	Stationsname	erledigt	korrigiert

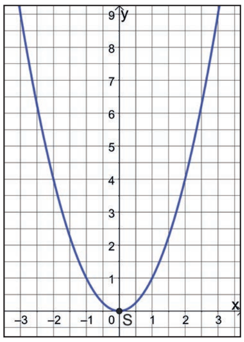
Stationenlernen Quadratische Funktionen – Bestell-Nr. P12 926

Theorie

Teil A – Parabeln der Form $y = ax^2$

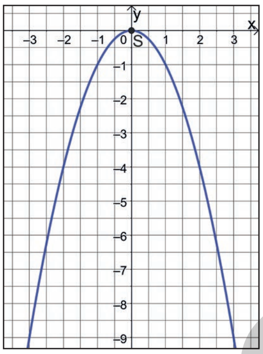
1. Grundlagen und Eigenschaften einer Parabel

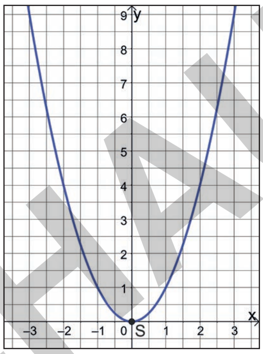
Die Gleichung $y = x^2$; $(x, y \in \mathbb{R})$ beschreibt eine **quadratische Funktion**, deren Graph eine **Normalparabel** darstellt. Eine Normalparabel ist **symmetrisch zur y–Achse**. Der Parabelpunkt, welcher auf der Symmetrieachse liegt, heißt **Scheitelpunkt S**. Bei Parabeln der Form $y = x^2$ liegt der Scheitelpunkt stets bei $S(0|0)$. Es gilt weiterhin $D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}_0^+$.



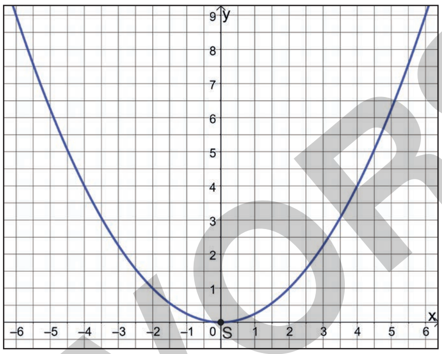
Gleichungen der Form $y = ax^2$; $(x, y \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ beschreiben Parabeln. Der Öffnungs–faktor a gibt folgende Eigenschaften an:

$a < 0$
nach unten geöffnet
S ist das Maximum der Parabel.

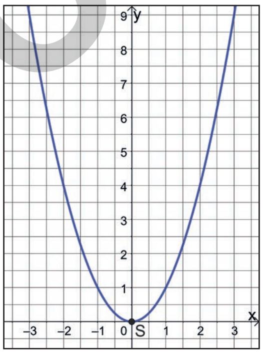




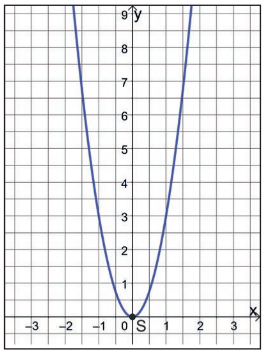
$a > 0$
nach oben geöffnet
S ist das Minimum der Parabel.



$|a| < 1$ gestauchte Parabel



$a = 1$ Normalparabel



$|a| > 1$ gestreckte Parabel

2. Zeichnen einer Parabel

Bestimme den Scheitelpunkt. → Berechne verschiedene Punktkoordinaten. → Verbinde die Punkte ohne Lineal.

3. Wertetabellen und Punktkoordinaten

Um die Lücken einer Wertetabelle berechnen zu können, setze den gegebenen Wert für x bzw. y in die Funktionsgleichung ein und berechne dann mit Hilfe dieser Gleichung den gesuchten Wert für y bzw. x.

Beispiel:

x	1	
$y = 3x^2$		6

$y = 3 \cdot 1^2$
$y = 3$

$6 = 3 \cdot x^2 \quad |:3$
$2 = x^2 \quad |\sqrt{\ldots}$
$x_1 = -\sqrt{2} \vee x_2 = \sqrt{\ldots}$

Achtung!
Durch das Wurzelziehen entstehen immer

Theorie

Teil B – Parabeln der Form $y = ax^2 + bx + c$

1. Scheitelpunkt berechnen

Mit Hilfe der Formel: **$S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$** lässt sich der Scheitelpunkt einfach berechnen.

Setze dazu die richtigen Zahlen für a, b und c ein.

2. Funktionsgleichung umformen

a) Allgemeine Form in Scheitelpunktform

	1. Berechne den Scheitelpunkt.	2. Lies den Wert für a aus der allgemeinen Form ab.	3. Setze a in die Scheitelpunktform ein: $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$
Beispiel: $y = 3x^2 + 2x + 1$	$S\left(-\frac{2}{2 \cdot 3} \mid 1 - \frac{2^2}{4 \cdot 3}\right)$ $S\left(-\frac{1}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$	a = 3	$y = 3\,(x - (-\frac{1}{3}))^2 + \frac{2}{3}$ p: $y = 3\,(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}$

b) Scheitelpunktform in allgemeine Form

Man erhält die allgemeine Form, indem man die Scheitelpunktform geschickt umformt.

Beispiel: $y = 4\,(x - 3)^2 + 2$ — Berechne die binomische Formel

$y = 4\,(x^2 - 6x + 9) + 2$ — Multipliziere aus und fasse zusammen.

p: $y = 4x^2 - 24x + 38$

3. Funktionsgleichung aufstellen

<u>1. Fall: gegeben S und P</u>

Setze die gegebenen Koordinaten in die Scheitelpunktform ein.	Berechne a	Gib die Gleichung an. $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$	Wandle evtl. in die allgemeine Form um.

<u>2. Fall: gegeben 2 Punkte und 1 Parameter (a, b oder c)</u>

Setze jeden Punkt zusammen mit dem gegebenen Parameter (a,b oder c) in die Form $y = ax^2 + bx + c$ ein. Dadurch entstehen 2 Gleichungen. Diese können nun z. B. mit dem Einsetzungsverfahren gelöst werden.

Beispiel: Gegeben sind die Punkte A (1 | 3), B (3 | 4) und a = 2.

A einsetzen: I: $3 = 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad | -2 - b$

I: $-b + 1 = c$

B einsetzen: II: $4 = 2 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

I in II: $4 = 18 + 3b - b + 1 \quad | -19$

$-15 = 2b \quad | :2$

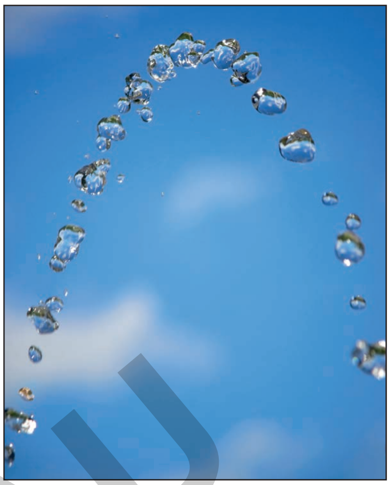
$b = -7{,}5$

b in I: $-(-7{,}5) + 1 = c$

a, b und c in allgemeine Form einsetzen: p: $y = 2x^2 - 7{,}5x + 8{,}5$

Weiterführende Aufgaben allgemeiner Parabeln

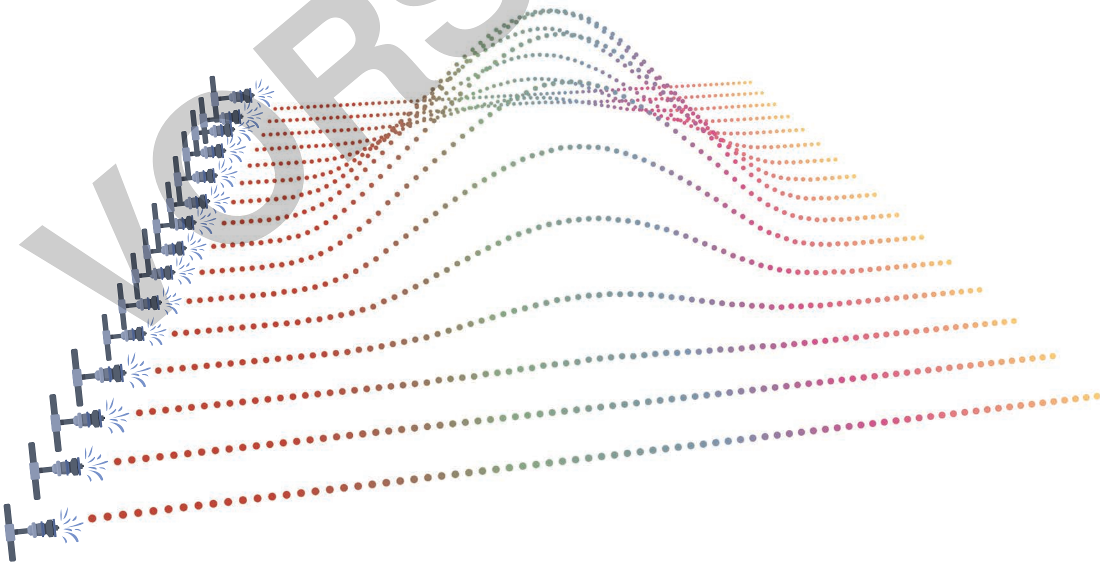
1. *Für einen neuen Wasserbrunnen sollen Wasserstrahlen so eingestellt werden, dass man einen parabelförmigen Regenbogen erkennen kann. Alle Wasserdüsen sind in einer Reihe hintereinander eingebaut und die Wasserdüsen sind unterschiedlich geneigt. Jeder Strahl soll in 10 m Entfernung gegenüber von der jeweiligen Düse im Boden landen. Außerdem sollen alle Scheitelpunkte in der Mitte der Strecke, also nach 5 m, erreicht werden.*



a) Berechne die erste Parabelgleichung, welche den Scheitelpunkt in 4 m Höhe erreicht, und zeichne die Parabel in ein Koordinatensystem.

b) Berechne die zweite und dritte Parabelgleichung, welche den Scheitelpunkt in 3 m bzw. in 2 m Höhe erreichen, und ergänze die beiden Parabeln in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a).

c) Stelle die Gleichung der Parabelschar in Abhängigkeit von der erreichten Höhe von u Metern auf. ($u \in \mathbb{R}^+$)

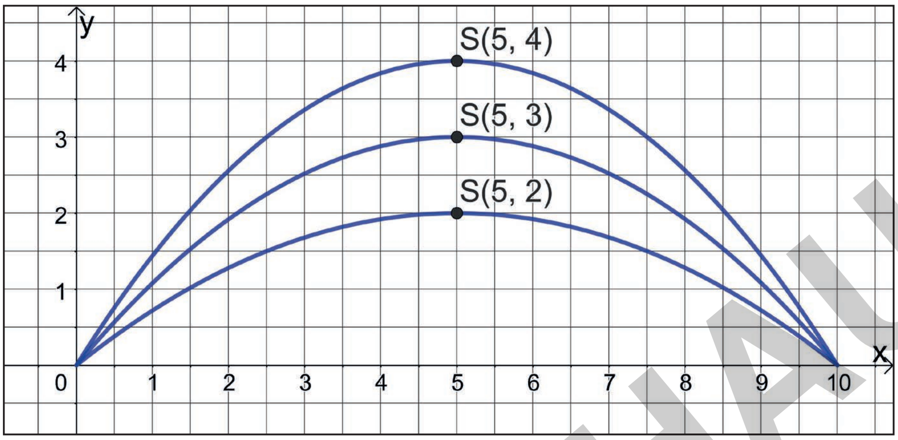


Weiterführende Aufgaben allgemeiner Parabeln

1. a) S(5|4); P(0|0) $0 = a\,(0 - 5)^2 + 4 \quad |-4$

$-4 = 25a \quad |:25$

$a = -0{,}16$



b) S(5|3); P(0|0) $0 = a\,(0 - 5)^2 + 3 \quad |-3 \qquad -3 = 25a \quad |:25 \qquad a = -0{,}12$

S(5|2); P(0|0) $0 = a\,(0 - 5)^2 + 2 \quad |-2 \qquad -2 = 25a \quad |:25 \qquad a = -0{,}08$

c) S(5|u); P(0|0) $0 = a\,(0 - 5)^2 + u \quad |-u \qquad -u = 25a \quad |:25 \qquad a = -\frac{u}{25}$

p(u): $y = -\frac{u}{25}\,(x - 5)^2 + u$

Stationenlernen Quadratische Funktionen – Bestell-Nr. P12 926
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

D4

Vermischte Aufgaben

1. *Gegeben sind die Punkte A(1 | 0); B(– 1 | – 1) und C(0 | 2).*

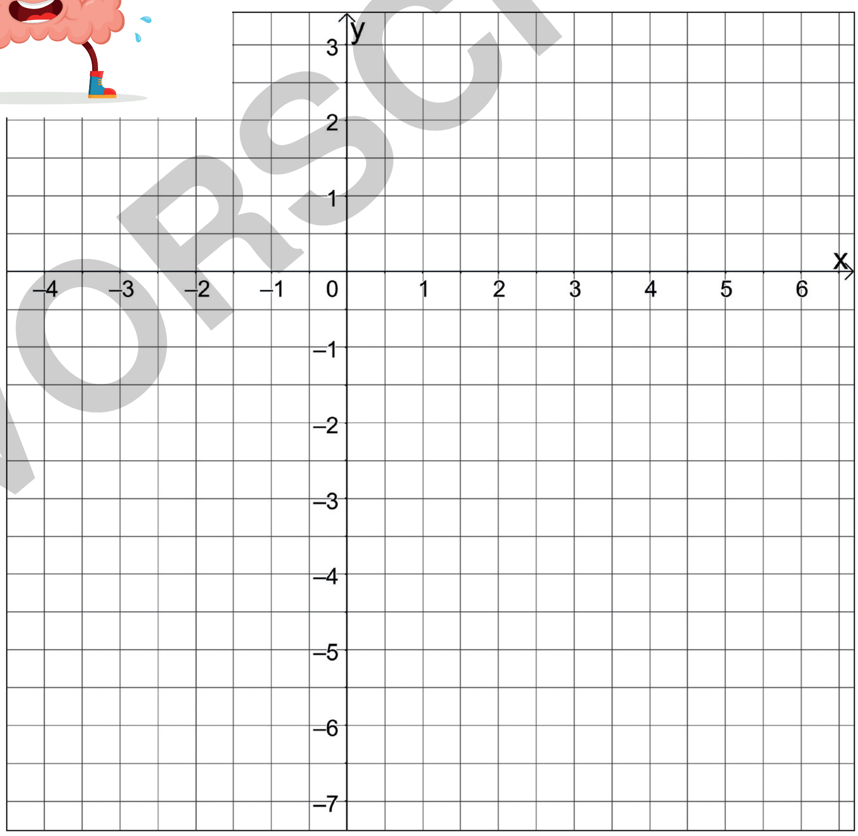
a) Stelle die Parabelgleichung durch die 3 Punkte A, B und C auf.
(Ergebnis: $y = -2{,}5x^2 + 0{,}5x + 2$)

b) Zeichne die Parabel in das Koordinatensystem.

c) Die Parabel p wird mit dem Vektor $\vec{v}$ auf die Parabel p': $y = -2{,}5x^2 + 15{,}5x - 23$ verschoben. Bestimme die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$ und zeichne p' in dasselbe Koordinatensystem ein.

d) Die Gerade g: $y = 0{,}5x - 3$ schneidet die beiden Parabeln. Bestimme alle Schnittpunkte. Zeichne die Gerade ein.

e) Bestimme eine zu g parallele Gerade h, die die beiden Parabeln in exakt drei Schnittpunkten schneidet und deren y–Achsenabschnitt $t < 0$ ist.
Zeichne auch diese Gerade ein.



Vermischte Aufgaben

a) I: $0 = a + b + c$ | II: $-1 = a - b + c$ | III: $\mathbf{2 = c}$

I: $0 = a + b + 2 \;|-a-2$

I: $-a - 2 = b$

II: $-1 = a - b + 2$

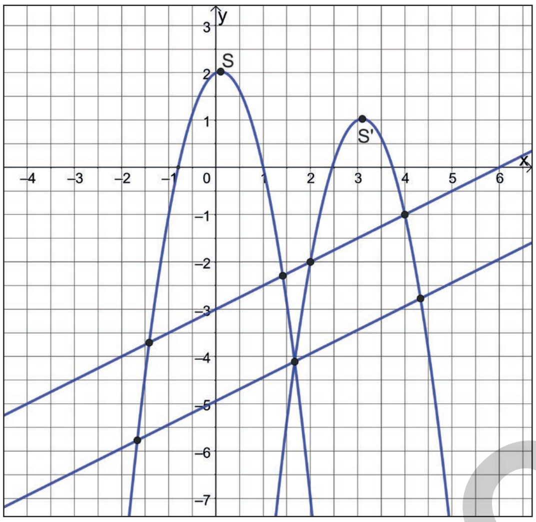
I in II: $-1 = a - (-a - 2) + 2$

$-1 = 2a + 4 \quad |-4$

$-5 = 2a \quad |:2$ $\qquad \mathbf{a = -2,5}$

a in I: $\mathbf{b = 0,5}$ $\qquad$ p: $y = -2,5x^2 + 0,5x + 2$

b)



c) $S\left(-\frac{-0,5}{2 \cdot (-2,5)} \,\middle|\, 2 - \frac{-0,5^2}{4 \cdot (-2,5)}\right)$; $S(0,1 \,|\, 2,025)$

$S\left(-\frac{-15,5}{2 \cdot (-2,5)} \,\middle|\, -23 - \frac{15,5^2}{4 \cdot (-2,5)}\right)$; $S(3,1 \,|\, 1,025)$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $g \cap p$:

$0,5x - 3 = -2,5x^2 + 0,5x + 2 \quad |-0,5x + 3$

$0 = -2,5x^2 + 5 \quad |-5$

$-5 = -2,5x^2 \quad |:(-2,5)$

$2 = x^2 \quad |\sqrt{\ldots}$

$x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

$G_1(-\sqrt{2} \,|\, -3,71)$; $G_2(\sqrt{2} \,|\, -2,29)$

e) $p \cap p'$: $-2,5x^2 + 0,5x + 2 =$

$-2,5x^2 + 15,5x - 23 \quad |+2,5x^2 - 0,5x + 23$

$25 = 15x \quad |:15$

$x = \frac{5}{3}$

$D\left(\frac{5}{3} \,\middle|\, -4,11\right)$

g': $-4,11 = 0,5 \cdot \frac{5}{3} + t \quad |-\frac{5}{3}$

$-4,94 = t$

g': $y = 0,5x - 4,94$

$g \cap p'$: $0,5x - 3 = -2,5x^2 + 15,5x - 23 \quad |-0,5x + 3$

$0 = -2,5x^2 + 15x - 20$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{(15^2 - 4 \cdot (-2,5) \cdot (-20))}}{2 \cdot (-2,5)}$$

$x_1 = 2$; $x_2 = 4$

$G_3(2 \,|\, -2)$; $G_4(4 \,|\, -1)$

Stationenlernen Quadratische Funktionen – Bestell-Nr. P12 926

KOHL VERLAG