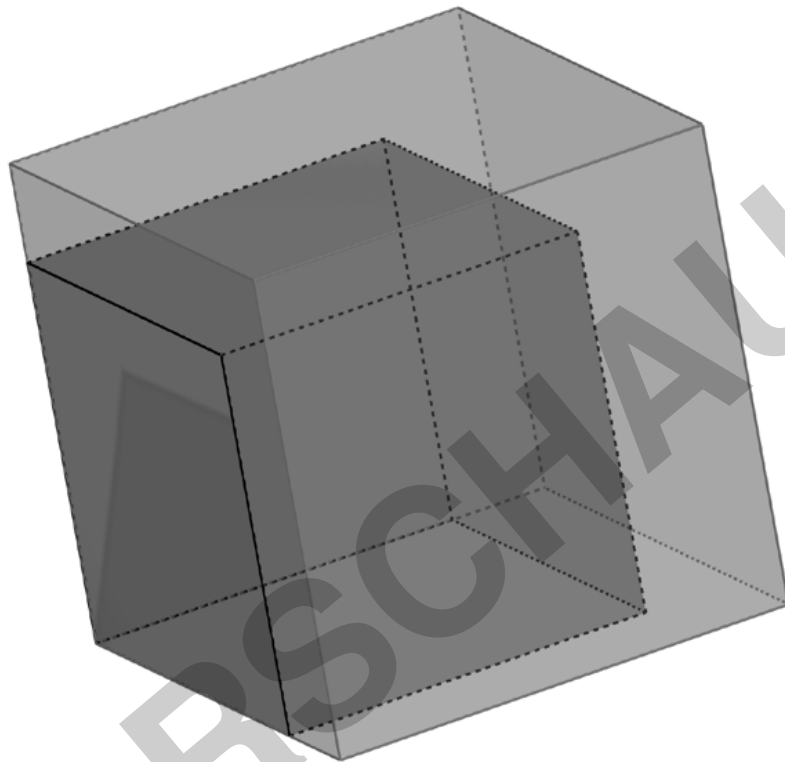


# Das Delische Problem

Günther Weber



Grafik: Günther Weber

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Würfel einen Würfel mit dem doppelten Volumen mit Zirkel und Lineal (ohne Markierungen) zu konstruieren, gehört zu den klassischen Aufgaben der griechischen Antike und wird Delisches Problem genannt. Obwohl eine Konstruktion nicht möglich ist, kann die Kantenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen ausgehend von der Dreiteilung einer der Quadratseiten und den daraus resultierenden Rechtecken hergeleitet werden. Mithilfe von Spiegelungen von Eckpunkten der Rechtecke und den dazu gehörenden Funktionen ergibt sich für eine Quadratseite ein Teilverhältnis von  $t_v = \sqrt[3]{2}$ , aus dem sich, übertragen in ein räumliches Koordinatensystem, ein Würfel mit doppeltem Volumen ergibt.

# Das Delische Problem

## Oberstufe (grundlegend)

Günther Weber

Hinweise	1
Aufgaben	3
Lösungen	5

### Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der Analysis und der Analytischen Geometrie im ebenen Koordinatensystem hinsichtlich der Bestimmung von Geradengleichungen anzuwenden und vergleichen die Lösungsschritte beim Rechenweg in der Analysis und Analytischen Geometrie. Im räumlichen Koordinatensystem wenden die Lernenden ihre erworbenen Kenntnisse (Aufstellen von Geraden- und Ebenengleichungen, Schnitt von Geraden und Ebenen, Spiegelung eines Punktes an einer Ebene) an.

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden können in der Ebene die Gleichung des Mittelpunktes einer Strecke, die Gleichung einer Gerade bzw. die Gleichung einer Mittelsenkrechten mit den Methoden der Analysis bzw. den Methoden der Analytischen Geometrie herleiten. Im Dreidimensionalen kennen Sie die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bzw. des Schnittpunktes zweier Geraden bereitet den Lernenden keine Probleme. Ebenso sind sie vertraut im Rechnen mit Parametern. Die Jugendlichen kennen die Eigenschaften der Spiegelung an einer Gerade oder Ebene und sie können mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen durchführen.

### Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP\\_GoSt\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GoSt_Mathematik.pdf)

(aufgerufen am 19.01.2024) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

### Die Schülerinnen und Schüler ...

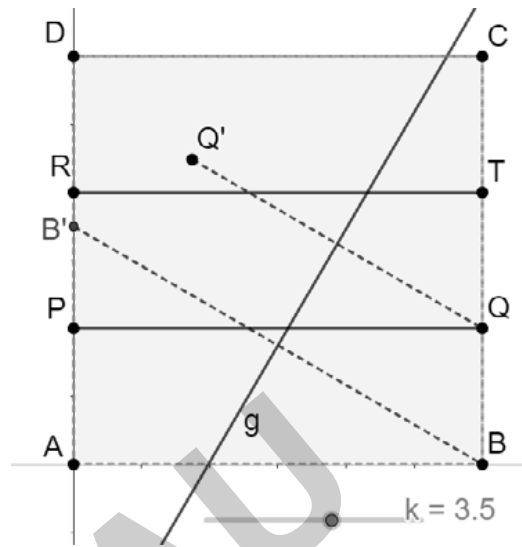
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Aus dem Bereich der Analysis werden vorwiegend Inhalte der Mittelstufe/Jahrgangsstufe 11 wie das Aufstellen von Geradengleichungen, das Aufstellen der Gleichung der Mittelsenkrechte sowie die Bestimmung des Schnittpunktes von Geraden als Kompetenzerwartung gefördert.

## Aufgaben:

M1

1. Zwei Seiten eines Quadrates ABCD mit der Seitenlänge  $a = 6$  cm liegen im 1. Quadranten auf den Koordinatenachsen. Zwei Parallelen  $\overline{PQ}$  und  $\overline{RT}$  zur Quadratseite  $\overline{AB}$  teilen das Quadrat in 3 kongruente Rechtecke (siehe nebenstehende Abbildung).



Grafik: Günther Weber

- a) Legen Sie einen Punkt  $B'(0|k)$ ,  $0 \leq k \leq 6$  auf die Quadratseite  $\overline{AD}$  und variieren Sie mithilfe eines Schiebereglers  $k$  (siehe Datei: **Deli\_Bestimmung\_k.ggb**) die Lage des Punktes  $B'$  so, dass bei Spiegelung an einer Geraden  $g$  der Punkt  $B$  auf  $B'$  und zugleich der Punkt  $Q$  auf die Parallele  $\overline{RT}$  abgebildet wird, d. h. dass der Spiegelpunkt  $Q'$  von  $Q$  auf der Parallelen  $\overline{RT}$  liegt.
- b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Spiegelgerade  $g$ , so dass bei Spiegelung an der Geraden  $g$  der Punkt  $B$  auf  $B'$  und zugleich der Punkt  $Q$  auf die Parallele  $\overline{RT}$  abgebildet wird.
- c) Bestimmen Sie das Streckenverhältnis  $\overline{DB'} : \overline{AB'}$ .
2. Bestimmen Sie die Gleichung der Spiegelgerade  $g$  aus Aufgabe 1b) mithilfe der Methoden der Analytischen Geometrie und geben Sie die Koordinaten der Spiegelpunkte  $B'$  und  $Q'$  an.
3. Es ist  $A(-1|3|-2)$ ,  $B(3|-1|0)$  und  $D(1|7|2)$
- a) Zeigen Sie, dass das Dreieck  $ABD$  rechtwinklig gleichschenkelig ist.
- b) Ergänzen Sie das Dreieck  $ABD$  zu einem Quadrat  $ABCD$ .
- c) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Ebene, die durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $D$  festgelegt ist, in Koordinatenform.
- d) Die Punkte  $P$  und  $R$  liegen auf der Quadratseite  $\overline{AD}$ , die Punkte  $Q$  und  $T$  auf der Quadratseite  $\overline{BC}$ , wobei der Punkt  $Q$  näher bei  $B$  liegt als der Punkt  $T$ . Bestimmen Sie die Gleichung zweier Parallelen  $\overline{PQ}$  und  $\overline{RT}$  zur Quadratseite  $\overline{AB}$ , die das Quadrat in 3 kongruente Rechtecke aufteilen.