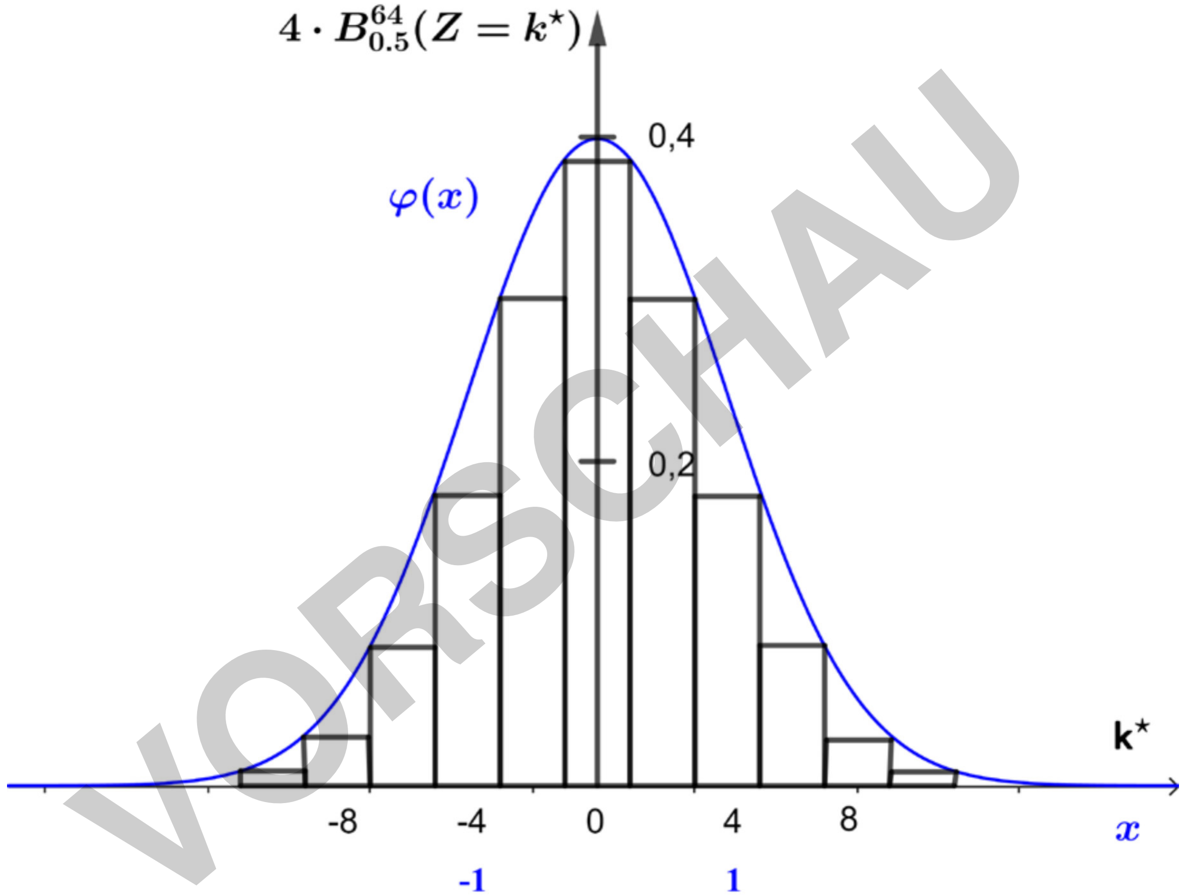
Näherung der Binomialverteilung – Gauß-Funktionen und Moivre-Laplace

Alfred Müller



© Skizze: Alfred Müller

Dieses Unterrichtsmaterial behandelt in ausführlicher Weise die Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung. Über die Gauß-Funktionen landet man bei den Näherungsformeln von Moivre-Laplace. Zeigen Sie Ihren Schülerinnen und Schülern, wie man auch ohne moderne Hilfsmittel komplexe Wahrscheinlichkeiten näherungsweise bestimmen kann. Die Einheit schließt mit einer umfangreichen Beispiel- und Aufgabensammlung ab, wodurch die Jugendlichen die erlernten Fähigkeiten einüben können.

Näherung der Binomialverteilung – Gauß-Funktionen und Moivre-Laplace

Oberstufe (weiterführend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

wie man Binomialverteilungen mit der Normalverteilung annähern kann. Sie erkennen dadurch Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Verteilungen. Die Lernenden entdecken, dass man auch ohne moderne Hilfsmittel wie dem Smartphone oder Computer komplexe Wahrscheinlichkeiten näherungsweise bestimmen kann.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
AB Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Zufallsgrößen	M1	AB
Gaußsche φ-Funktion	M2	AB
Lokale Näherungsformel	M3	AB
Gaußsche Φ-Funktion	M4	AB
Globale Näherungsformeln	M5	AB
Anwendungsbeispiele	M6	AB

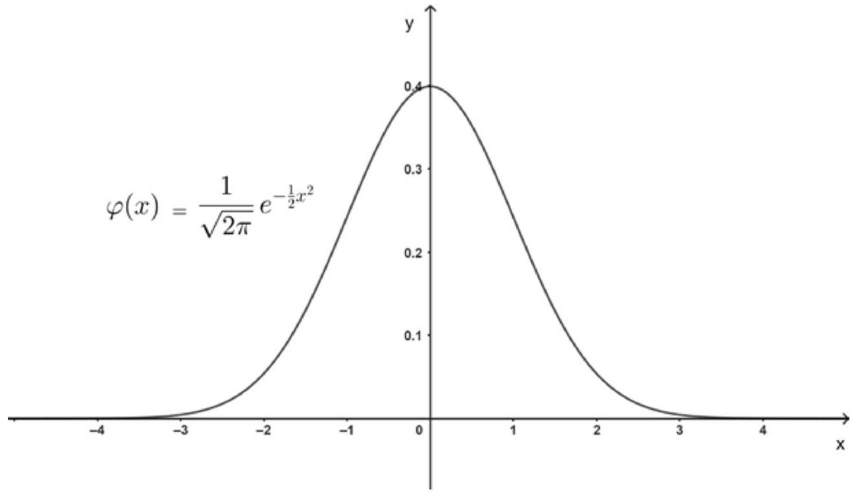
Kompetenzprofil:

Inhalt: Zufallsvariable, Binomialverteilung, Normalverteilung, Dichtefunktion, Verteilungsfunktion, Näherungsformeln nach Moivre-Laplace, Alternativ- und Signifikanztest

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Erklärung zu den Symbolen

einfaches Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau



Anmerkung: Die Werte der φ – Funktion findet man im Tabellenwerk unter der Rubrik „Dichte der Standardnormalverteilung". (Tabellenwerke, z. B. Mühlbauer, Tafelwerk zur Stochastik, bsv München Barth, Tabellen zur Stochastik, Oldenbourg Verlag München)

Beispiele:

1. Bestimmen Sie mit der Tabelle der Dichte der Standardnormalverteilung

   $\varphi(1{,}16)$ und $\varphi(-1{,}96)$.

   Lösung: $\varphi(1{,}16) = 0{,}20357$; $\varphi(-1{,}96) = 0{,}05844$;

2. Bestimmen Sie x mit der Tabelle der Dichte der Standardnormalverteilung:

   $\varphi(x)=0{,}22988$ und $\varphi(x)=0{,}07074$

   Lösung:

   $\varphi(x)=0{,}22988 \Rightarrow x=\pm\ 1{,}05$ $\varphi(x)=0{,}07074 \Rightarrow x=\pm\ 1{,}86$

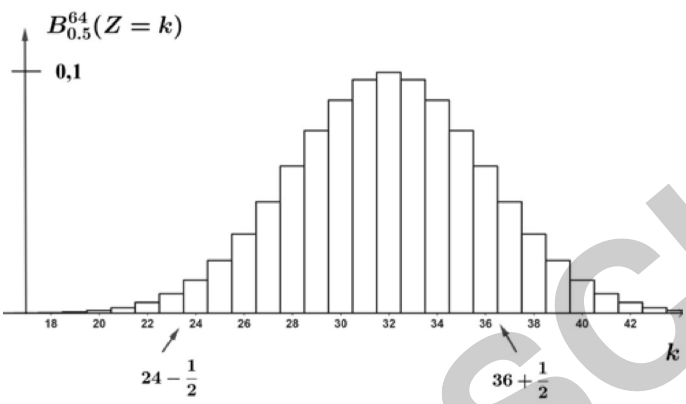
Aufgaben

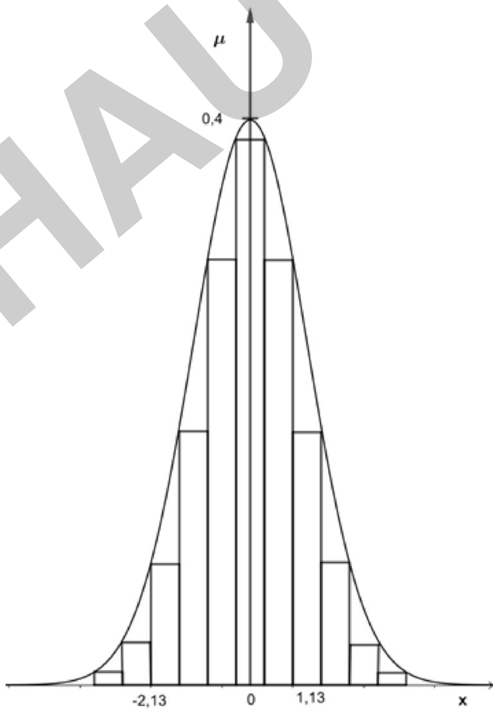
1. Bestimmen Sie mithilfe der Tabelle der Dichte der Standardnormalverteilung:
   a) $\varphi(0{,}00)$,
   b) $\varphi(2{,}03)$,
   c) $\varphi(-\ 0{,}5)$.
2. Bestimmen Sie x mithilfe der Tabelle der Dichte der Standardnormalverteilung
   a) $\varphi(x)=0{,}34849$,
   b) $\varphi(x)=0{,}02705$,
   c) $\varphi(x)=0{,}11450$.

Die Gaußsche Summenfunktion Φ

M4

Praktische Probleme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden in den meisten Fällen Summen von Wahrscheinlichkeiten benötigen, z. B. in der Art $P(k_1 \leq Z \leq k_2)$. Die Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten mit der Binomialverteilung ist dann sehr mühsam, wenn diese nicht tabelliert ist. Auch die Verwendung der lokalen Näherungsformel ist nicht sinnvoll, da diese sehr oft angewendet werden müsste. Zur Gewinnung einer Näherungsformel betrachten wir wieder die Verteilung $B^{64}_{0,5}$ und versuchen die Wahrscheinlichkeit $B^{24}_{0,5}(24 \leq Z \leq 36)$ zu berechnen.





Skizzen: Alfred Müller

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass Z einen Wert k mit $k_1 \leq Z \leq k_2$ annimmt, entspricht der Gesamtheit aller Rechteckflächen des Histogramms zwischen $k_1 - \frac{1}{2}$ und $k_2 + \frac{1}{2}$ als untere bzw. obere Grenze. Mit den Überlegungen von vorher wird die Standardisierung mit $k \mapsto \frac{k-\mu}{\sigma}$ und $y = \varphi(x) = \sigma \cdot B^n_p(Z = k)$ durch die Gauß-Kurve angenähert.

Der Flächeninhalt der Gauß-Kurve mit der x-Achse zwischen den Werten

$x_1 = \dfrac{k_1 - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}$ und $x_1 = \dfrac{k_2 + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}$ kann als Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit $B^n_p(k_1 \leq Z \leq k_2)$ angesehen werden.

Für hinreichend große n gilt für die Binomialverteilung B_p^n

$$B_p^n\left(k_1 \le Z \le k_2\right) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P(Z=k) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt \text{ mit } x_1 = \frac{k_1 - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma} \text{ und } x_1 = \frac{k_2 + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}.$$

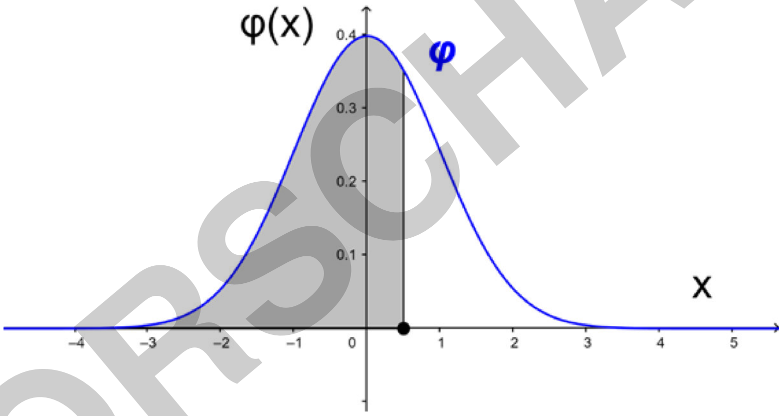
Diese Schreibweise lässt sich vereinfachen, wenn man für das Integral in der globalen Näherungsformel die Gaußsche Summenfunktion Φ verwendet, die wie folgt definiert ist:

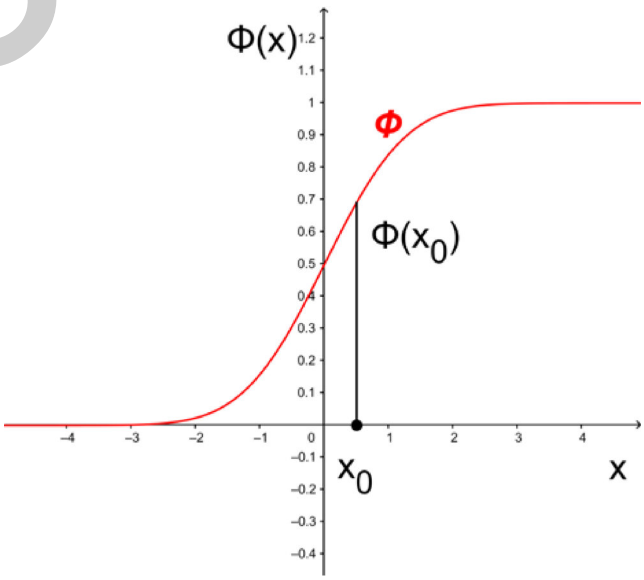
Die in $D_\Phi = \mathbb{R}$ definierte Funktion Φ mit

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

heißt **Gaußsche Summenfunktion**.

Die Werte der Φ-Funktion findet man im Tabellenwerk unter der Rubrik „Standardnormalverteilung" oder unter https://raabe.click/SNV-Tafelwerk.





$$B_{0,36}^{300}(Z<100)\approx \Phi\left(\frac{100-108-0{,}5}{\sqrt{69{,}12}}\right)\approx \Phi(-1{,}02)$$
$$=1-\Phi(1{,}02)=1-0{,}84614=0{,}15386=15{,}39\%$$

$$B_p^n(Z\geq k)=1-B_p^n(Z<k)\approx 1-\Phi\left(\frac{k-\mu-0{,}5}{\sigma}\right)$$

$$B_p^n(k_1<Z\leq k_2)\approx \Phi\left(\frac{k_2-\mu+0{,}5}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-\mu+0{,}5}{\sigma}\right)$$

$$B_p^n(k_1\leq Z<k_2)\approx \Phi\left(\frac{k_2-\mu-0{,}5}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-\mu-0{,}5}{\sigma}\right)$$

3. Berechnen Sie $B_{0,55}^{40}(Z\geq 24)$.

Lösung:

$\mu=n\cdot p=40\cdot 0{,}55=22$ $\quad\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{40\cdot 0{,}55\cdot 0{,}45}=\sqrt{9{,}9}$

$$B_{0,55}^{40}(Z\geq 24)=1-B_{0,55}^{40}(Z\leq 23)\approx 1-\Phi\left(\frac{23-22+0{,}5}{\sqrt{9{,}9}}\right)$$

$$1-\Phi(0{,}48)=1-0{,}68439=0{,}31561=31{,}56\%$$

4. Berechnen Sie $B_{0,16}^{500}(72<Z\leq 84)$.

Lösung:

$\mu=n\cdot p=500\cdot 0{,}16=80$ $\quad\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{500\cdot 0{,}16\cdot 0{,}84}=\sqrt{67{,}2}$

$$B_{0,16}^{500}(72<Z\leq 84)\approx \Phi\left(\frac{84-80+0{,}5}{\sqrt{67{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{72-80+0{,}5}{\sqrt{67{,}2}}\right)$$
$$=\Phi(0{,}55)-\Phi(-0{,}91)=\Phi(0{,}55)-1+\Phi(0{,}91)$$
$$=0{,}70884-1+0{,}81859=0{,}52743=52{,}74\%$$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie mit der globalen Näherungsformel nach Moivre-Laplace:

a) $B_{0,28}^{100}(20\leq Z\leq 30)$,

b) $B_{0,90}^{80}(Z\leq 70)$,

c) $B_{0,66}^{50}(Z>30)$,

d) $B_{0,6}^{350}(180\leq Z<230)$,

e) $B_{0,44}^{50}(Z<25)$.

Aufgabe

6. Für die Verpackung eines Werbegeschenks benötigt eine Firma 500 Etuis, die mit dem Firmenlogo bedruckt sind. Leider treten auch mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 % Fehldrucke auf. Es werden 500 Etuis geliefert. Bestimmen Sie, in welchem kleinsten Intervall symmetrisch um den Erwartungswert die Anzahl der Fehldrucke mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit liegt.

Beispiel (6)

Ein Zufallsexperiment gelingt mit der konstanten Wahrscheinlichkeit von 70 %. Wie oft muss man dieses Experiment mindestens ausführen, wenn es mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 90 % mehr als 50-mal gelingen soll?

Lösung:

Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der „Treffer" an. Z ist binomialverteilt mit p = 0,7.

Es gilt $\mu = n \cdot p = 0{,}7n$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \sqrt{0{,}21n}$.

Gesucht ist die Länge n der Stichprobe:

$$B_{0,7}^{n}(Z>50) = 1 - B_{0,7}^{n}(Z \le 50) \approx 1 - \Phi\left(\frac{50-0{,}7n+0{,}5}{\sqrt{0{,}21n}}\right) \ge 0{,}90 \quad \Phi\left(\frac{50-0{,}7n+0{,}5}{\sqrt{0{,}21n}}\right) \le 0{,}10$$

Mit den Quantilen der Normalverteilung gilt

$$\frac{50-0{,}7n+0{,}5}{\sqrt{0{,}21n}} \le -1{,}2816$$

$$0{,}7n - 0{,}587\sqrt{n} - 50{,}5 \ge 0 .$$

Mit der Formel für die quadratische Gleichung gilt

$$\sqrt{n} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}7}\left(0{,}587 \pm \sqrt{0{,}587^2 + 4 \cdot 0{,}7 \cdot 50{,}5}\right).$$

Da das Minuszeichen nicht infrage kommt, folgt: $n \ge 79{,}63 \Rightarrow n \ge 80$.

Es müssen mindestens 80 „Treffer" auftreten.

Aufgaben

7. Fortsetzung der Aufgabe 6: Bestimmen Sie, wie viele Etuis man mindestens bestellen muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % auch wirklich 500 richtig bedruckte erhält.