

II.C.25

Stochastik

Stochastik mit Verkehrszeichen – Alltägliche Schilder im Fokus der Wahrscheinlichkeit

Günther Weber



© RAABE 2023

© Thomas-Soellner/iStock/Getty Images Plus

Wir bewegen uns täglich im Straßenverkehr. Doch selten betrachten wir die Straßenschilder aus einer mathematischen Perspektive. Dabei gibt es hierzu kreative Möglichkeiten: verschiedene Merkmale der Verkehrszeichen hinsichtlich beispielsweise Form oder Größe können benutzt werden, um Ereignisse zu definieren und deren Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Wird das Einhalten von Verkehrszeichen untersucht, so kann dies zu einer Dreiecksverteilung führen, die mithilfe der Analysis ausgewertet werden kann. Aussagen zu Verkehrszeichen können mithilfe von Tests überprüft werden. Nutzen Sie diese Unterrichtsreihe für die etwas andere Art der Zufallsexperimente und fördern Sie so die Motivation der Lernenden.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11–13
Dauer:	11 Unterrichtsstunden (Minimalplan 8)
Kompetenzen:	mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Inhalt:	Baumdiagramm, (bedingte) Wahrscheinlichkeit, Simulation, Formel von Bernoulli, hypergeometrische Verteilung, einseitiger/zweiseitiger Test, Fehlerquote, Dichtefunktion
Zusatzmaterialien:	Excel-Dateien zur Simulation



netzwerk
lernen

zur Vollversion

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt; Bi: Bildimpuls; Info: Informationsblatt

Übung

M 1 (Bi)	Verkehrszeichen und Wahrscheinlichkeit – Bilder
M 2 (Ab)	Verkehrszeichen und Wahrscheinlichkeit – Aufgaben
M 3 (Info)	Simulation: Auswahl von 5 Verkehrszeichen
M 4 (Ab)	Wahrscheinlichkeitsverteilung anhand des eingeschränkten Halteverbots
M 5 (Ab)	Führerschein-Theorieprüfung und Hypothesentest
M 6 (Ab)	Herstellung von Verkehrszeichen und Wahrscheinlichkeit



Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit mit den einzelnen Materialien, die unabhängig voneinander eingesetzt werden können:

M 1 (Bi)	Verkehrszeichen und Wahrscheinlichkeit – Bilder
M 2 (Ab)	Verkehrszeichen und Wahrscheinlichkeit – Aufgaben
M 4 (Ab)	Wahrscheinlichkeitsverteilung anhand des eingeschränkten Halteverbots
M 5 (Ab)	Führerschein-Theorieprüfung und Hypothesentest
M 6 (Ab)	Herstellung von Verkehrszeichen und Wahrscheinlichkeit

Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.				
	einfaches Niveau		mittleres Niveau		schwieriges Niveau
	Zusatzaufgaben		Alternative		Selbsteinschätzung

M 1

Verkehrszeichen und Wahrscheinlichkeit – Bilder

			
Ende der Vorfahrtstraße	Ende der Fußgängerzone	getrennter Rad- und Fußweg	Vorrang Gegenverkehr
			
vorgeschriebene Höchstgeschwindigkeit 40 km/h	Gefahrenstelle	Gegenverkehr	einmalige Vorfahrt
			
Grünpfeil	Vorfahrt gewähren	Fahrbahnverengung	Stau
			
Doppelkurve	Verbot für Kraftfahrzeuge aller Art	Verkehrsberuhigter Bereich	Schleudergefahr bei Nässe oder Schmutz
			
vorgeschriebene Mindestgeschwindigkeit 30 km/h	Überholverbot für Kraftfahrzeuge aller Art	Ende der Geschwindigkeitsbegrenzung	Kreuzung; oder Einmündung mit Vorfahrt von rechts

Abbildungen: Wikimedia Commons, gemeinfrei

Verkehrszeichen und Wahrscheinlichkeit – Aufgaben

M 2



Aufgabe 1

Fertigen Sie eine Tabelle an, in der Sie angeben, bei welchem Verkehrszeichen von **M 1** es sich um ein Gefahren-, ein Vorschrifts- oder ein Richtzeichen handelt. Notieren Sie in der Tabelle zudem die Form – die abgerundeten Ecken sind nicht zu beachten – und die kennzeichnende Farbe des Verkehrszeichens.

Verkehrszeichen	Art des Zeichens (Gefahr-, Vorschrifts-, Richt-)	Form	Farbe
...

Aufgabe 2

Von den Verkehrszeichen von **M 1** werden zufällig 3 Zeichen ohne Zurücklegen ausgewählt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- E1: Es wird kein Vorschriftszeichen entnommen.
 E2: Die 3 ausgewählten Verkehrszeichen sind von der gleichen Art.
 E3: Die 3 ausgewählten Verkehrszeichen sind von unterschiedlicher Art.
 E4: Es wird genau 2 Mal ein Gefahrzeichen ausgewählt.
 E5: Es wird mindestens 1 Mal ein Richtzeichen ausgewählt.
 E6: Es wird genau 2 Mal ein Zeichen der gleichen Art ausgewählt.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Verkehrszeichen

- kein Gefahrenzeichen ist, wenn es dreieckig ist.
- ein Vorschriftszeichen ist, wenn es rund ist.
- blau ist, wenn es ein Vorschriftszeichen ist.
- ein Richtzeichen ist, wenn es quadratisch ist.
- ein Gefahrzeichen ist, wenn es nicht rot ist.

Aufgabe 4

Von **M 1** wurden zufällig 5 Zeichen ohne Zurücklegen ausgewählt.

- Simulieren** Sie mit der Datei „M2 Aufgabe 4 Simulation.xlsx“ 1000 Mal die Auswahl von 5 Verkehrszeichen und bestimmen Sie die relative Häufigkeit für folgende Ereignisse:
 E1: es wird 2 Mal ein Gefahren- und 3 Mal ein Vorschriftszeichen ausgewählt.
 E2: es wird 1 Mal ein Gefahren- 3 Mal ein Vorschrifts- und einmal ein Richtzeichen ausgewählt
 E3: Bei der Auswahl sind das 1., 3. und 5. Zeichen von der gleichen Art. Die Art des 2. und 4. Zeichens kann beliebig sein, darf also auch mit jener des 1., 3. und 5. Zeichens übereinstimmen.
 E4: Bei der Auswahl sind das 1., 3. und 5. Zeichen von der gleichen Art. Auch hier darf die Art des 2. und 4. Zeichens beliebig sein, darf jedoch nicht mit jener des 1., 3. und 5. Zeichens übereinstimmen.
- Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse E1 bis E4 aus Aufgabenteil 4a. Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die relative Häufigkeit von der berechneten Wahrscheinlichkeit abweicht.



M 3 Simulation: Auswahl von 5 Verkehrszeichen

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	T	U	V	W	X	
1	Auswahl von Verkehrszeichen																	
2																		
3	Gefahrenzeichen		7															
4	Vorschriftszeichen		9															
5	Richtzeichen		4															
6	Anzahl der Verkehrszeichen		20															
7	noch nicht ausgewählte Verkehrszeichen																	
8	Entnahme	ausgewähltes Zeichen	Art des Zeichens		1	2	3	4	5	6	7	8	16	17	18	19	20	
9	1	16	V		1	2	3	4	5	6	7	8	17	18	19	20		
10	2	18	R		1	2	3	4	5	6	7	8	17	19	20			
11	3	20	R		1	2	3	4	5	6	7	8	17	19				
12	4	3	G		1	2	4	5	6	7	8	9	19					
13	5	6	G															
14																		
15	Start: 1																	
16	Zurücksetzen: 0	1																
17	Anzahl der Versuche	1001																
18																		
19	Entnahme Nr.	Anzahl G	Anzahl V	Anzahl R	E1:	rel.H.	E2:	rel.H.										
20	1	2	2	1	0	0,00	0	0,00										
21	2	2	1	2	0	0,00	0	0,00										

Im Bereich **C3:C5** ist die Anzahl der jeweiligen Verkehrszeichen angegeben. Die Gesamtanzahl wird berechnet in Zelle **C6** durch die Formel **=SUMME(C3:C5)**.

Die Verkehrszeichen (1–7 Gefahr-, 8–16 Vorschrifts- und 17–20 Richtzeichen) werden aufgelistet im Bereich **E8:X8** durch Eingabe von 1 in Zelle **E8** und durch die zu kopierende Formel in Zelle **F8**: **=WENN(E8<\$C\$6;E8+1;“”)**.

Im Bereich **B9:C13** wird angegeben, welche Verkehrszeichenummer gezogen wird und zu welcher Art das Zeichen gehört. Dies geschieht durch die zu kopierenden Formeln

in Zelle **B9**: **=GANZZAHL(ZUFALLSZAHL()*\$C\$6)+1**

in Zelle **C9**: **=WENN(B9<=\$C\$3+\$C\$4;WENN(B9<=\$C\$3;0,5;1);2)**

Die gezogene Verkehrszeichenummer (**B9**) steht für eine weitere Entnahme nicht mehr zur Verfügung, sie ist also aus den Zahlen, die im Bereich **E8:X8** angegeben sind, zu entfernen. Dies geschieht dadurch, dass die gezogene Verkehrszeichenummer gelöscht wird und alle folgenden Nummern um ein Feld vorrücken.

Wenn die gezogene Platznummer das 1. Verkehrszeichen ist (Bereich **E9:E10**), dann wird die Zahl durch die rechts oberhalb stehende ersetzt, sonst bleibt sie an ihrem Platz (sie wird durch die genau oberhalb stehende Zahl ersetzt). Die zu kopierende Formel für den Bereich **E9:E10** in Zelle **E9** lautet daher: **=WENN(B9=E8;F8;E8)**.

Die nachfolgenden Verkehrszeichenummern werden jeweils durch die rechts oberhalb stehende Verkehrszeichenummer ersetzt, wenn sie direkt gezogen werden oder wenn eine weiter links stehende Platznummer gezogen worden ist (die links stehende und die oberhalb stehende Zahl stimmen überein). Ist keiner der beiden Fälle aufgetreten, dann bleibt sie an ihrem Platz (die Zahl direkt oberhalb wird übernommen). Die zu kopierende Formel für den Bereich **F9:X10** in Zelle **F9** ist somit: **=WENN(ODER(\$B9=F8;E9=F8);G8;F8)**.

Die gezogenen Verkehrszeichenummern in Zelle **B9** werden bestimmt durch die Formel

=GANZZAHL(ZUFALLSZAHL()*\$C\$6)+1,

die anderen Verkehrszeichenummern werden bestimmt, indem mithilfe der Index-Funktion auf die noch vorhandenen Verkehrszeichenummern zugegriffen wird. Durch Angabe der Spalte, zufällig gewählt mithilfe der Funktion Ganzzahl und Zufallszahl, wird die gezogene Verkehrszeichenummer aus der einzeiligen Matrix zurückgegeben. Die zu kopierende Formel für den Bereich **B10:B13** in Zelle **B10** lautet:

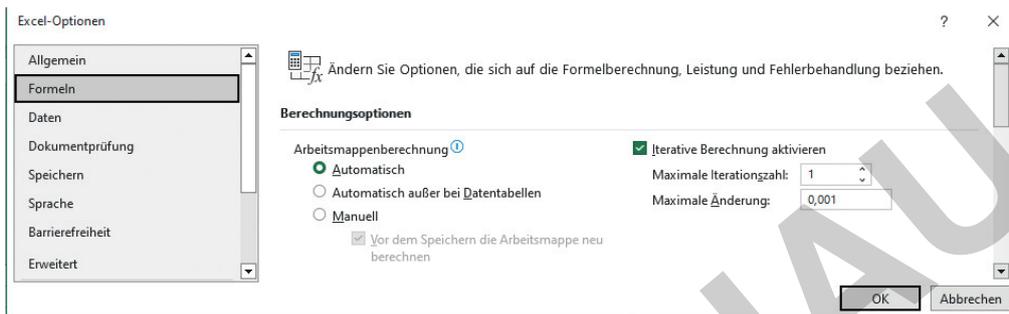
=INDEX(E9:W9;GANZZAHL(ZUFALLSZAHL()*(\$C\$6-A9))+1).

Im Bereich C9:C13 erfolgt die Zuweisung der Verkehrszeichen-Art durch die zu kopierende Formel =WENN(B9<=\$C\$3+\$C\$4;WENN(B9<=\$C\$3;0,5;1);2).

B15 stellt einen „Schalter“ dar, mit dem die Simulation gestartet bzw. die Werte zurückgesetzt werden können (andernfalls müssten die erzeugten Auswertungen für eine neue Versuchsserie gelöscht werden). In Zelle B17 wird gezählt, wie oft die Simulation durchgeführt wurde, durch die Formel =WENN(B15=0;0;B17+1).

Anmerkung:

Da in der Formel in Zelle B17 wieder auf die Zelle B17 zugegriffen wird, liegt hier ein Zirkelbezug vor, für den die Option „iterative Berechnung aktivieren“ zu setzen ist.



Die Auswertung für die Ereignisse E1 bzw. E2 erfolgt ab den Zellen B20 bis K20 durch die zu kopierende Formel in Zelle

B20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;ZÄHLENWENN(\$C\$9:\$C\$13;"G");B20))

C20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;ZÄHLENWENN(\$C\$9:\$C\$13;"V");C20))

D20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;ZÄHLENWENN(\$C\$9:\$C\$13;"R");D20))

E20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;WENN(UND(B20=2;C20=3);1;0);E20))

G20 =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;SUMME(\$E\$20:E20)/A20;G20))

I20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;WENN(UND(B20=1;C20=3;D20=1);1;0);I20))

und in Zelle K20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;SUMME(\$I\$20:I20)/A20;K20))

Für die Auswertung der Ereignisse E3 bzw. E4 wird die Oberfläche etwas abgeändert:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
19	Entnahme Nr.	Zeichen 1	Zeichen 3	Zeichen 5	E3:	rel-H.			Anzahl		E4:	rel-H.	
20	1	G	V	V	0	0.000			2		0	0.000	
21	2	G	R	V	0	0.000			2		0	0.000	

Das 1., 3. und 5. ausgewählte Verkehrszeichen wird in den Bereich B20:D1019 übernommen. Eine Auswertung erfolgt dann in Spalte E bzw. G durch die zu kopierende Formel in

E20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;WENN(UND(B20=C20;B20=D20);1;0);E20))

G20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;SUMME(\$E\$20:E20)/A20;G20))

Für das Ereignis E4 wird zusätzlich überprüft, wie oft das 1. ausgewählte Zeichen vorkommt. Dies geschieht durch die zu kopierende Formel in

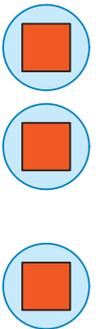
I20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;ZÄHLENWENN(\$C\$9:\$C\$13;\$C\$9);I20))

Die Berechnung der relativen Häufigkeit geschieht durch die zu kopierenden Formeln in Zelle

K20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;WENN(UND(B20=C20;B20=D20;I20=3);1;0);K20))

M20: =WENN(\$B\$15=0;"";WENN(\$B\$17=A20;SUMME(\$K\$20:K20)/A20;M20))

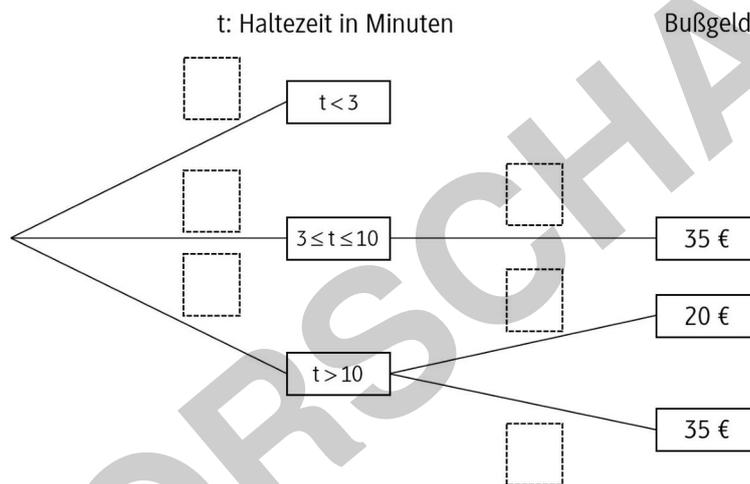
- b) **Bestimmen** Sie einen Funktionsterm für die oben beschriebene Wahrscheinlichkeitsfunktion f .
- c) i) **Bestimmen** Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Verteilungsfunktion $f(t)$.
 ii) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Haltezeit um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert nach oben abweicht.



Aufgabe 2

Gleichzeitig mit der Haltedauer wird festgestellt, ob der Verkehr behindert wird, und notiert, welche Bußgelder erhoben würden. Hierbei „drückt man bei einer Haltezeit von 3 bis 10 Minuten die Augen zu“ und erhebt nur dann ein Bußgeld, wenn der Verkehr behindert wird. Dies ist bei 10 % der Fall. Bei einer Haltezeit von mehr als 10 Minuten gilt das Bußgeld der Straßenverkehrsordnung in Höhe von 20 € (wenn keine Verkehrsbehinderung eintritt) bzw. 35 € (falls es zu einer Verkehrsbehinderung kommt). Eine Behinderung des Verkehrs tritt hier bei 20 % ein.

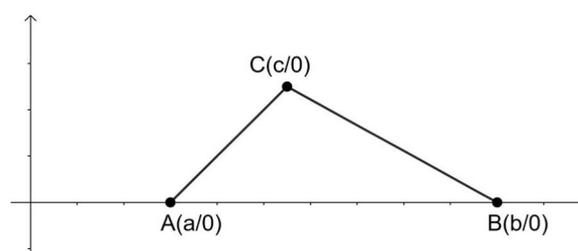
- a) **Berechnen** Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion f und tragen Sie alle Wahrscheinlichkeiten in das nachfolgende Baumdiagramm ein.



- b) **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit für ein Bußgeld in Höhe von 20 € bzw. 35 €.
- c) Ein Bußgeld von 35 € wird fällig. **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Fahrzeug länger als 10 Minuten im eingeschränkten Halteverbot gestanden hat.

Aufgabe 3

Eine Verteilung, wie sie in Aufgabe 1 vorkommt, heißt Dreiecksverteilung. Die nebenstehende Abbildung zeigt eine allgemeine Dreiecksverteilung, die nichtnegative Werte im Intervall $[a;b]$ annimmt. Die größte Wahrscheinlichkeit h tritt bei c ein.



Bestimmen Sie allgemein den Funktionsterm $f(x)$ zu einer Dreiecksverteilung und berechnen Sie den Erwartungswert für diese Verteilung. **Vergleichen** Sie den Erwartungswert mit dem in Aufgabe 1c bestimmten Erwartungswert.



© RAABE 2023

M 5

Führerschein-Theorieprüfung und Hypothesentest

Die Führerschein-Theorie-Frage 1.2.11 – 005 – B bietet folgende Auswahlmöglichkeiten:

Theoriefrage 1.2.11 – 005 – B

Wie verhalten Sie sich?



Geschwindigkeit vermindern und nötigenfalls anhalten

Weiterfahren und auf den Gehweg ausweichen

Beschleunigt weiterfahren, weil der Gegenverkehr warten muss

Punkte: 4

© RAABE 2023

© TÜV/DEKRA arge tp 21

Eine Fahrlehrerin der Fahrschule Kosmann schätzt, dass diese Frage von ca. 18 % der Fahrschülerinnen und Fahrschüler falsch beantwortet wird.

Aufgabe 1

- a) **Geben Sie an**, wie viele Ankreuzmöglichkeiten es gibt, wenn auch Mehrfachauswahl möglich ist.
- b) **Bestimmen Sie**, wie viele Personen die Frage beantworten müssen, damit mit mindestens 95 % Sicherheit mindestens eine Person die Frage mindestens einmal falsch beantwortet hat.
- c) Ein Kollege der Fahrlehrerin zweifelt ihre Einschätzung an und möchte dies durch die Nullhypothese $H_0 = 0,18$ beim Testen von 50 Personen mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ überprüfen. **Bestimmen Sie**, bei wie vielen falschen Antworten die Nullhypothese abzulehnen ist.



	Gefahr	Dreieck	rot
	Vorschrift	Kreis	rot
	Gefahr	Dreieck	rot
	Gefahr	Dreieck	rot
	Vorschrift	Kreis	rot
	Richt	Rechteck	blau
	Vorschrift	Dreieck	rot
	Vorschrift	Kreis	blau
	Vorschrift	Kreis	rot
	Vorschrift	Kreis	grau
	Gefahr	Dreieck	rot

© RAABE 2023

