

I.D.68

Geometrie

Mathematisches Argumentieren und Beweisen mit Winkel- und Kongruenzsätzen

Marc Eßer



© RAABE 2023

© jppoole/iStock/Getty Images Plus; verändert

Mathematik betreiben, ist mehr als rechnerisches Kalkül. Dass die Mathematik über das bloße Anwenden und Ausrechnen auch Argumentieren bedeutet, rückt immer wieder in den Hintergrund. In dieser Unterrichtseinheit wird das Beweisen und Argumentieren in den Mittelpunkt des Kompetenzerwerbs gestellt. Im Dreischritt Euklids von Behauptung, Voraussetzung und Beweis weisen die Lernenden mithilfe der Winkel- und Kongruenzsätze Zusammenhänge nach. So gelingt es Ihrer Klasse, sprachsensibel das strukturierte Argumentieren einer formal-logischen Beweisführung zu erlernen. Eine hohe Schüleraktivität wird durch Gruppenarbeit erreicht.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	7/8
Dauer:	2 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Winkel- und Kongruenzsätze; geometrische Eigenschaften des Dreiecks
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), kommunizieren (K6)



Neben dem Material werden alle Aufgaben durch Hinweise oder Tipps für leistungsschwächere Lernende bzw. einen niedrighwelligen Einstieg differenziert. Dies führt zu einer möglichst selbstständigen Beschäftigung mit den vorliegenden Aufgaben.

Die an die Startinformationen anschließenden Lösungswege zur Begründung können in der Reihenfolge voneinander abweichen und gerade in Satz 3 ist die Kreativität der Begründungen seitens der Lernenden zur Lösung des Problems von ihren individuellen Wissensbeständen abhängig. Mehrere richtige Argumentationsketten sind hier zum Beleg der Behauptung möglich. Das führt zu einer Offenheit der Aufgabe, die fachliche Kreativität erforderlich macht.

Eine mögliche Alternative wäre die Präsentation verschiedener Sätze, die in unterschiedlichen Gruppen erarbeitet werden. Jedoch besteht die Gefahr, dass die Präsentationsphase statt einer Sicherung des Gelernten eine Überforderung für viele Lernenden darstellt, da das Nachvollziehen einer fremden Argumentationsstruktur durch die Präsentation einer Gruppe die meisten Lernenden vor große Schwierigkeiten stellen würde. Deshalb erhalten alle Gruppen dasselbe Material. Die Lernenden sind nicht geübt im Umgang mit mathematischen Beweisstrukturen, sodass eine Kurzpräsentation eher zu einer routinierten Übung anstelle einer echten Auseinandersetzung verkommen würde.

Die **Sicherungsphase** gestaltet sich demnach als Plenumsphase, in der einzelne Gruppen ihre Argumentation vor der Klasse vortragen und das Plenum die eigenen Lösungen abgleicht bzw. alternative Argumentationen vorstellt oder fehlerhafte Darstellungen korrigiert. Durchaus ist die Reihenfolge der Argumentationen nicht immer eindeutig, sodass in der Sicherung die Richtigkeit der Argumentationen begründet geprüft werden sollte. Das bringt die Lernenden miteinander im Plenum ins Fachgespräch.

Die **Transferphase** besteht darin, dass besonders leistungsstarke Gruppen, die bereits eine eigene Argumentation in Satz 3 entwickelt haben, ihre Beweisschritte vorstellen. Sie wenden die gelernten Strukturen auf ein neues Problem an, ohne dass ihnen Hilfen in einer bereits vorstrukturierten Form zur Verfügung stehen. Diese Phase hängt von der Geschwindigkeit der Gruppen und der kognitiven Leistung ab und wird daher als „Eventualphase“ gekennzeichnet, da diese besondere Leistung im Anforderungsbereich III möglicherweise die vorherige Sicherungsphase notwendig macht, damit die Lernenden in dem höchsten Anforderungsbereich arbeiten können. Hier agieren Sie als Lehrkraft flexibel auf das Unterrichtsgeschehen. Alternativ kann die Transferphase auch als wiederholender Einstieg in der nächsten Stunde genutzt werden, sodass mit den Ergebnissen im weiteren Verlauf der Reihe flexibel umgegangen werden kann und eine Wertschätzung der Lernenden-Arbeit in jedem Fall erfolgt.

Was muss bekannt sein?

Die Lernenden sollten in vorangegangenen Unterrichtsstunden bereits die Kongruenzsätze erarbeitet und mithilfe dieser erste einfache Sachverhalte argumentativ begründet haben.

Diese sind im Material **M 7** allerdings nochmal übersichtlich zusammengefasst. Das Material kann daher schwächeren Lernenden als Hilfe dienen. Außerdem sollten die Lernenden in der Anwendung der Winkelsätze geübt sein.

Diese Kompetenzen trainieren die Lernenden








Die Lernenden

- argumentieren mathematisch (K 1), indem sie Lösungswege begründen und dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente nutzen, Argumente zu Argumentationsketten verknüpfen, beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind, lückenhafte und fehlerhafte Argumentationsketten ergänzen bzw. korrigieren
- kommunizieren (K 6), indem sie Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren und präsentieren, Beiträge aufgreifen und sie weiterentwickeln.

Die prozessbezogenen Kompetenzen erweitern die Lernenden anhand der inhaltsbezogenen Kompetenzen im Bereich der Geometrie mit dem Schwerpunkt des Lösens geometrischer Probleme mithilfe von Winkel- und Kongruenzsätzen, indem sie

- Winkel- und Kongruenzsätze benennen und anwenden,
- geometrische Eigenschaften des Dreiecks, wie die Höhe in Dreiecken und Mittelpunkte der Seiten, untersuchen,
- die geometrischen Eigenschaften des Dreiecks zur Verallgemeinerung innerhalb von Gruppen von Dreiecken nutzen und Folgerungen spezieller Eigenschaften in den Gruppen herleiten.

Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.				
	einfaches Niveau		mittleres Niveau		schwieriges Niveau
	Zusatzaufgaben		Alternative		Selbsteinschätzung

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Tk = Tippkarten; Üb = Übersicht
Planung für 2 Stunden

Einstieg

Thema: **Grundlagen: Wenn ... , dann ... – Sprachsensibles Argumentieren**

M 1 (Ab) „Wenn ..., dann ...“ – Beweisstrukturen sprachlich erfassen

M 2 (Ab) Der Basiswinkelsatz – Beweis

Erarbeitung

Thema: **Materialgestütztes Beweisen mathematischer Sätze in kooperativer Gruppenarbeit**

M 3 (Ab) Beweis Satz 1

M 4 (Ab) Beweis Satz 2

M 5a (Ab) Beweis Satz 3

M 5b (Tk) Tippkarten zur Differenzierung von Satz 3



Ergebnissicherung

Thema: **Übersicht der 4 Sätze**

M 6 (Üb) Übersicht der 4 Sätze – Satz, Voraussetzung, Beweis

Wiederholung

Thema: **Wiederholung der Kongruenzsätze**

M 7 (Üb) Kongruenzsätze in der Übersicht

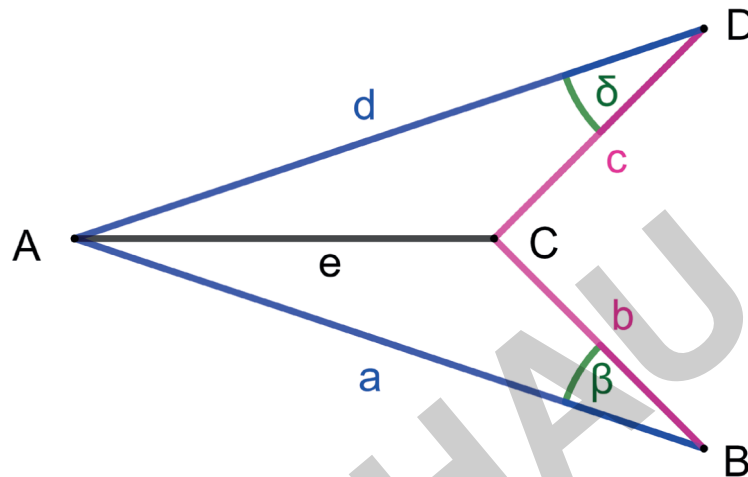
Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 18.

Satz 3

Der Satz

Wenn im Viereck unten die Seitenlängen $a = d$ und $b = c$ gilt, dann sind die Winkel β und δ gleich groß.



Voraussetzung

Viereck mit den Seitenlängen $a = d$ und $b = c$.

Der Beweis

Schritt 1: Die Dreiecke ABC und ACD haben eine gemeinsame Seite e.

Schritt 2: Die Seite a des Dreiecks ABC und die Seite d des Dreiecks ACD sind gleich lang n. V.

Schritt 3: Die Seite b des Dreiecks ABC und die Seite c des Dreiecks ACD sind gleich lang n. V.

Schritt 4: Damit sind alle drei Seiten der Dreiecke ABC und ACD gleich lang. Sie sind kongruent nach dem Kongruenzsatz SSS.

Schritt 5: Damit sind auch alle Winkel gleich groß und deshalb gilt Winkel $\beta = \gamma$.

Kongruenzsätze in der Übersicht



Definition: Kongruenz bei Dreiecken

Kongruent ist ein anderes Wort für *deckungsgleich*.

Zwei Dreiecke nennt man in der Mathematik *kongruent*, wenn man sie ausschneiden könnte und sie dann ganz genau aufeinanderpassen.

Oder mathematisch ausgedrückt:

Zwei Dreiecke sind *kongruent*, wenn sie in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen.

Es gibt vier Kongruenzsätze.

Wenn ein Kongruenzsatz auf zwei Dreiecke zu trifft, dann sind sie deckungsgleich.

Kongruenzsatz SSS

Zwei Dreiecke sind genau dann deckungsgleich, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.

Kongruenzsatz SWS

Zwei Dreiecke sind genau dann deckungsgleich, wenn zwei der Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich groß sind.

Kongruenzsatz WSW

Zwei Dreiecke sind genau dann deckungsgleich, wenn eine der Seiten und die beiden daran anliegenden Winkel gleich groß sind.

Kongruenzsatz SSW

Zwei Dreiecke sind genau dann deckungsgleich, wenn zwei Seiten und ein Winkel gleich groß sind.

Achtung: Der Winkel muss dabei der längeren Seite gegenüber liegen!

Hinweis:

Das S in den Abkürzungen steht für gleich lange Seiten. Das W steht für gleich große Winkel.

Kongruenzsätze Wiederholung

Du willst die Kongruenzsätze nochmal wiederholen? Dann schau dir dieses Video an:

<https://raabe.click/kongruenzaetze>



Lösungen (M 1)

Aufgabe

1. A. **Wenn** Susi gute Laune hat, **dann** schenkt sie Strolch nach der zweiten Pause ihren Müsliriegel.
- B. **Wenn** Susi vor 7:10 Uhr aus der Wohnung geht, **dann** bekommt sie den frühen Bus.
- C. **Wenn** Susi auf dem Weg Strolch trifft, **dann** ist sie um 7:45 Uhr an der Schule.
- D. **Wenn** Susi den frühen Bus erwischt, **dann** kann sie Strolch auf dem Weg zur Schule treffen.
- E. **Wenn** Susi früh aufsteht, **dann** frühstückt sie noch zu Hause.

2.

Satz	Voraussetzung	Folge
A	Wenn Susi gute Laune hat,	dann schenkt sie Strolch nach der zweiten Pause ihren Müsliriegel.
B	Wenn Susi vor 7:10 Uhr aus der Wohnung geht,	dann bekommt sie den frühen Bus.
C	Wenn Susi auf dem Weg Strolch trifft,	dann ist sie um 7:45 Uhr an der Schule.
D	Wenn Susi den frühen Bus erwischt,	dann kann sie Strolch auf dem Weg zur Schule treffen.
E	Wenn Susi früh aufsteht,	dann frühstückt sie noch zu Hause.

3. Die Aussagen A bis E sind nach Voraussetzung wahre Aussagen.

Wenn Aussage B wahr ist, dann bekommt Susi den frühen Bus, weil sie vor 7:10 Uhr aufsteht. Nun ist auch Aussage D wahr. Mit Aussage D gilt, dass sie durch das Erwischen des frühen Busses auch Strolch auf dem Weg zur Schule trifft. Daraus folgt, dass Noahs Behauptung wahr ist.

Aussage A, C und E sind für die Überprüfung von Noahs Behauptung nicht relevant.