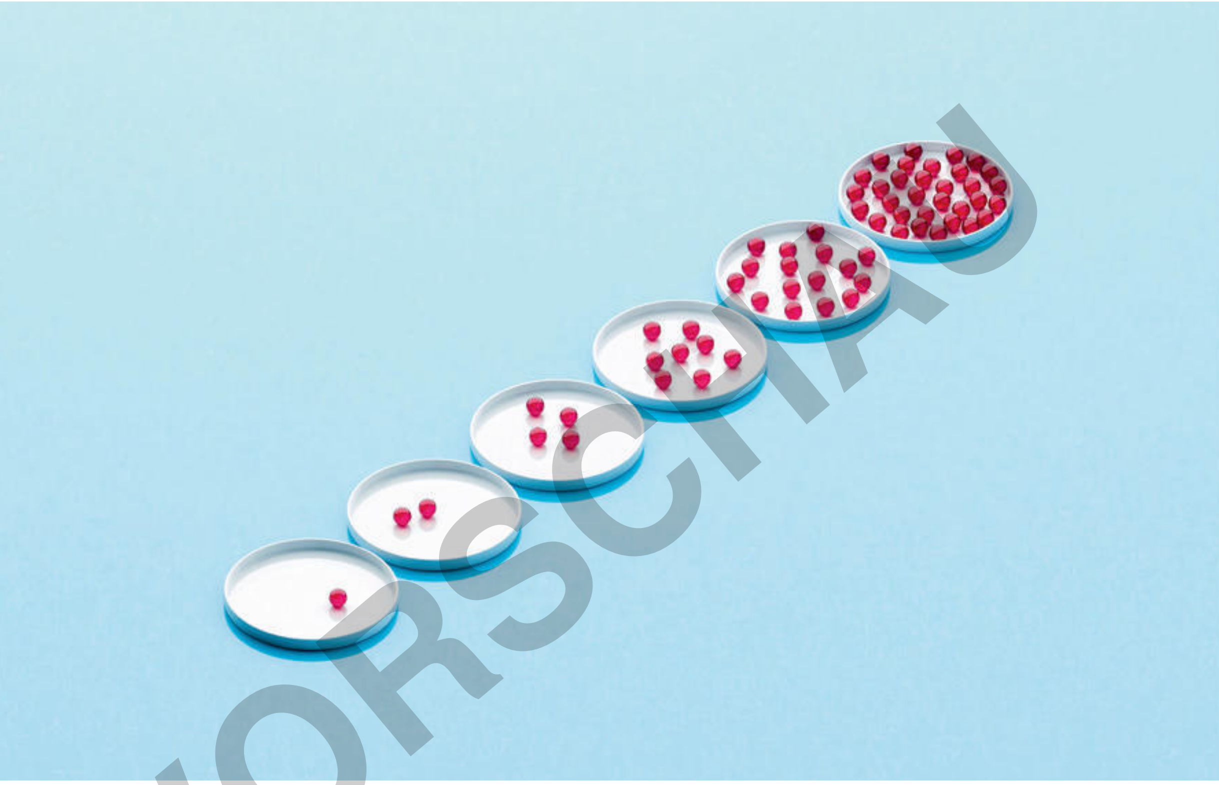
Wachstum, Zerfall und zeitliche Veränderungen – Anwendungen der Exponentialfunktion

Alfred Müller



Ob das Wachstum von Bakterienkulturen oder der Zerfall von radioaktiven Substanzen, mathematisch lassen sich solche Prozesse häufig mithilfe von Exponentialfunktionen beschreiben.

Nach einer kurzen Einleitung und Wiederholung der wichtigsten Eigenschaften dieser Art von Funktionen lösen Ihre Schülerinnen und Schüler eine Reihe von Textaufgaben, in denen zeitliche Veränderungen mittels Exponentialfunktionen beschrieben werden. Dabei sind nicht nur ihre mathematischen Fähigkeiten gefordert, die Jugendlichen trainieren auch das Verstehen von beschreibenden Texten und das Übersetzen in die Sprache der Mathematik.

Wachstum, Zerfall und zeitliche Veränderungen – Anwendungen der Exponentialfunktion

Oberstufe (weiterführend/vertiefend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Beschreibende Texte zu mathematischen Problemen verstehen
Integrieren und Differenzieren von Exponentialfunktionen
Lösen von Gleichungen mit Exponentialtermen
Mathematisches Modellieren von Wachstums- und Zerfallsprozessen

4. Bakterienkultur I

Der Bestand einer Bakterienkultur zur Zeit x (in Stunden) wird durch die Funktionsgleichung $y = f(x) = k \cdot e^{ax}$ beschrieben. Zur Zeit x = 0 (Beginn der Beobachtung) befanden sich 5 000 Bakterien in der Kultur, nach 4 Stunden sind es 55 000.

a) Bestimmen Sie die Variablen k und a.

b) Wie viele Bakterien befinden sich nach 8 Stunden in der Kultur?

c) Nach welcher Zeit vervierfacht sich die Anzahl der Bakterien?

5. Bakterienkultur II

In einem speziellen Nährboden befinden sich zu Beginn einer Beobachtung $8 \cdot 10^{12}$ Bakterien.

Die Variable x bezeichne die Anzahl der Stunden nach Beobachtungsbeginn und die Funktion $g(x) = \frac{12e^x}{(e^x + 1)^2}$ die Änderung der Bakterienzahl pro Stunde. Eine Einheit auf der y-Achse entspricht $8 \cdot 10^{12}$ Bakterien.

a) Untersuchen Sie die Funktion g für $x \to \infty$ und zeichnen Sie den Graphen G_g der Funktion g.

b) Die Funktion g nimmt für x > 0 streng monoton ab. Nimmt deshalb auch der Bestand an Bakterien ab?

c) Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(x) = \frac{-12}{e^x + 1}, D_G = D_g$ eine Stammfunktion zur Funktion g ist. Beschreibt diese Funktion aber auch den gesamten Bakterienbestand zum Zeitpunkt x? Wenn nein, was muss bei G(x) ergänzt werden?

d) Welcher Bakterienbestand ist nach zwei Stunden, welcher längerfristig zu beobachten?

6. Radioaktiver Zerfall

Bei der Untersuchung in der Umgebung eines Kernkraftwerkes wurde in Pfifferlingen eine Cäsiumaktivität von $15 \frac{Bq}{g}$ (Bq = Einheit „Becquerel" = Zerfälle pro Sekunde) festgestellt. Bekannt ist, dass die jährliche Zerfallsrate des Cäsiumisotops ${}^{137}_{55}Cs$ einen Wert von 2,3 % besitzt, d. h. die Anfangsaktivität von $A_0 = 15 \frac{Bq}{g}$ ist nach einem Jahr um 2,3 % geringer.

a) Geben Sie die Gleichung für die Aktivität in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) an und bestimmen Sie dann die Aktivität nach 20 Jahren.

b) Bestimmen Sie die Halbwertszeit des obigen Cäsiumisotops sowie die Zeit t´, in der die Aktivität auf 1 % abgesunken sein wird.

7. Unwetter – Regenabfluss
   a) Nach einem „Jahrhunderthochwasser“ wird in einer betroffenen Gegend ein Dauerregen durch die Funktion z mit $z(x) = 50 - 0{,}046 \cdot e^x$ mit x in Tagen nach Regenbeginn und $z(x)$ in Liter pro m^2 und Tag abgebildet.
   Zeigen Sie, dass der modellhaft angenommene Dauerregen etwa eine Woche dauert. Skizzieren Sie den Graphen G_z der Funktion $z(x)$ in ein Koordinatensystem und berechnen Sie die gesamte Wassermenge je m^2, die während des Dauerregens niedergeht.
   b) Für die Wasserabflussrate a wird folgende Funktion modellhaft angenommen: $a(x) = 1{,}84 + 100 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ mit x in Tagen nach Regenbeginn und $a(x)$ in Liter pro m^2 und Tag.
   Zeichnen Sie den Graphen G_a der Funktion a in das unter Teilaufgabe a) angelegte Koordinatensystem. Wie groß ist zu Beginn des Regens die Abflussrate? Welche (nicht-mathematische) Begründung fällt Ihnen für den Verlauf der Abflussrate ein?
   c) Bestätigen Sie, dass nach drei Tagen das Wasser nicht mehr völlig abfließt.
   d) Nach drei Tagen staut sich das Wasser. Zeigen Sie, dass das durch den Dauerregen erzeugte Wasser nach sieben Tagen noch nicht, nach acht Tagen aber völlig abgeflossen ist.

8. Beschäftigtenanzahlen
   Zum Zeitpunkt t = 0 hatte die Firma Alber 12 800 Mitarbeiter, die Firma Border 16 400. Die Entwicklung der Beschäftigtenzahlen wird durch die Funktionen g_A bzw. g_B angegeben mit $g_A(t) = 12800 \cdot e^{0{,}020 \cdot t}$ bzw. $g_B = 16400 \cdot e^{-0{,}018 \cdot t}$, wobei t in Jahren angegeben ist.
   a) Was lässt sich über die Mitarbeiterentwicklungen der beiden Firmen sagen und wann werden beide Firmen die gleiche Mitarbeiterzahl besitzen?
   b) Zum Zeitpunkt t = 0 gibt es auch die Überlegung, beide Firmen zu einer neuen Firma Consor zu vereinigen. Untersuchen Sie die Entwicklung der Mitarbeiterzahl, wenn die Entwicklungen der Beschäftigungszahlen der beiden (Teil-)Firmen erhalten bleiben soll.

Aufgabe 2

$y = f(x) = 4 \cdot \left(e^{-2x} - e^{-0,5x} + 1\right),\ x \in \mathbb{R}_0^+$

a) Schnittpunkte mit der x-Achse:

Betrachtet wird die Gleichung $e^{-2x} - e^{-0,5x} + 1 = 0$

Für $x > 0$ gilt sowohl $0 < e^{-2x} < 1$ als auch $0 < e^{-0,5x} < 1$ sowie $e^{-0,5x} > e^{-2x}$.

Daraus folgt, dass für $x > 0$ gelten muss: $e^{-2x} - e^{-0,5x} > -1$

$\Rightarrow e^{-2x} - e^{-0,5x} + 1 = 0$ für $x > 0$

Es bleibt die Untersuchung von $x = 0: e^{-2x} - e^{-0,5x} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

Damit ist die Gleichung $e^{-2x} - e^{-0,5x} + 1 = 0$ in $D = \mathbb{R}_0^+$ nicht lösbar.

$\Rightarrow$ Es gibt keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

Schnittpunkte mit der y-Achse:

$y = f(0) = 4 \cdot (1 - 1 + 1) = 4 \Rightarrow N(0 \mid 4)$

Extremwerte:

$f'(x) = 4 \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x} + 0,5 \cdot e^{-0,5x}\right)$

$f''(x) = 4 \cdot \left(4 \cdot e^{-2x} - 0,25 \cdot e^{-0,5x}\right)$

$f'(x) = 0: -2 \cdot e^{-2x} + 0,5 \cdot e^{-0,5x} = 0$

$\Rightarrow 0,5 \cdot e^{-0,5x} = 2 \cdot e^{-2x}$

$e^{-0,5x} = 4 \cdot e^{-2x}$

$e^{1,5x} = 4$

$$1,5x = \ln 4 \Rightarrow x = \frac{\ln 4}{1,5} = \frac{2 \cdot \ln 4}{3} = \frac{\ln 16}{3} \approx 0,92$$

$$f\left(\frac{\ln 16}{3}\right) = 4 \cdot \left(e^{-\frac{2}{3}\ln 16} - e^{-\frac{1}{6}\ln 16} + 1\right) = 4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16^2}} - \frac{1}{\sqrt[6]{16}} + 1\right) \approx 2,11$$

$$f''\left(\frac{\ln 16}{3}\right) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt } T\left(\frac{\ln 16}{3} \,\middle|\, 2,11\right)$$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0: 4 \cdot e^{-2x} - 0,25 \cdot e^{-0,5x} = 0$

$4 \cdot e^{-2x} = 0,25 \cdot e^{-0,5x}$

$$16 = e^{1,5x} \Rightarrow 1,5x = \ln 16 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot \ln 16}{3} = \frac{\ln 256}{3} \approx 1,85$$