Grundvorstellungen aufbauen

Was sind Grundvorstellungen? Welche Rolle spielen sie beim Lernen von Mathematik? Und wie kann man die Entstehung und Entwicklung von Grundvorstellungen fördern?

RUDOLF VOM HOFE, JÜRGEN ROTH

Auf diese Fragen geben wir eine Antwort und erklären zunächst, was man im Allgemeinen unter Grundvorstellungen versteht. Dabei handelt es sich nicht um statische Vorstellungsbilder, sondern um ein lebendiges System, das mit fortschreitendem Kompetenzaufbau erweitert und vernetzt wird. Anhand von Beispielen zeigen wir, wie sich Grundvorstellungen vom Beginn der Schulzeit bis in die Sekundarstufe hinein entwickeln.

Das Lernen besser verstehen

Wie spielt man Volleyball?

Betrachten wir Jugendliche, die Beachvolleyball spielen (**Abb. 1**). Wie machen die das? Woher wissen sie, wie sie die Hand halten müssen, wie hoch sie springen und wie sie ihren Körper strecken müssen? Natürlich hat dies viel mit Übung zu tun und mit Wissen und Erfahrung, die im Langzeitgedächtnis gespeichert sind. Doch wie? Merkt man sich „fotografisch" Spielsituationen, um sie später wieder abzurufen? Oder merkt man sich einzelne Bewegungsabläufe und ihre Kombinationen?

Aus der Sportpsychologie wissen wir, dass Bewegungsabläufe durch *Bewegungsvorstellungen* gesteuert werden. Komplexe Bewegungsabläufe setzen sich aus Einzelbewegungen zusammen, die – je nach Situation – flexibel koordiniert werden können. Diesen Einzelbewegungen entsprechen *motorischen Elementarvorstellungen*. Diese sind im Langzeitgedächtnis gespeichert und können – je nach Situation – kombiniert und als Komplex abgerufen werden (s. Schack u. a. 2020).

Und wie ist das beim Mathematiklernen?

Im Gegensatz zum Volleyball hat man bei der Mathematik mehr Zeit zum Überlegen (**Abb. 2**). Aber woher weiß man, wie man eine Aufgabe angeht, ob Addieren oder Multiplizieren, ob eine lineare oder eine quadratische Funktion passend ist?

Wie wir aus vielen Untersuchungen wissen, ist auch mathematisches Denken und Handeln immer mit *Vorstellungen* verbunden, die bewusst oder unbewusst wirksam sind. Diese Vorstellungen sind ebenfalls im Langzeitgedächtnis gespeichert und vernetzt. Oft müssen mehrere Vorstellungen aktiviert und koordiniert werden, um eine Aufgabe zu bewältigen. Diese Vorstellungen können für die Lösung zielführend sein – aber auch Fehler verursachen.

> Tragfähige mathematische Vorstellungen nennen wir *Grundvorstellungen*; abgekürzt GV.
>
> (vom Hofe/Blum 2016)

Die Bedeutung von Grundvorstellungen wird besonders deutlich, wenn wir ihre Rolle im Modellierungsprozess betrachten (s. Blum/Leiss 2005). Für die wichtige Übersetzung zwischen Realität und Mathematik (in **Abb. 3** an den Stellen 2 und 4) sind Grundvorstellungen erforderlich. Ist etwa eine Situation mit einem linearen Wachstum gegeben, brauche ich eine Vorstellung davon, mit welchen mathematischen Mitteln man dieses Wachstum darstellen kann. Welche Funktionen sind dafür geeignet und welche nicht? Fehlen solche Vorstellungen, stehen sich Realität und Mathematik beziehungslos gegenüber.

Bei vielen Lernenden ist dies tatsächlich der Fall: Sie können sich gut in realen Kontexten bewegen, haben aber keine Ahnung, wie sie diese in Mathematik übersetzen können. Aber auch das Gegenteil kommt häufig vor: Lernende können gut rechnen, wissen aber nicht, was ihre Rechnungen für Anwendungssituationen bedeuten. Und auch innerhalb der Mathematik (in **Abb. 3** an Stelle 3) sind Grundvorstellungen erforderlich, wenn etwa zwischen Geometrie und Algebra übersetzt werden muss und eine graphisch dargestellte lineare Steigung mit einem Term auszudrücken ist.

Wie entstehen Grundvorstellungen?

Basis für die Entwicklung von Grundvorstellungen sind mathematische Handlungserfahrungen. Diese entwickeln sich über Prozesse der Verinnerlichung zu Handlungsmustern. Die Ausprägung von Grundvorstellungen hängt ab vom Umfang der entsprechenden Handlungserfahrungen und von der Häufigkeit ihrer Aktivierung. Dabei lassen sich zwei Ar-

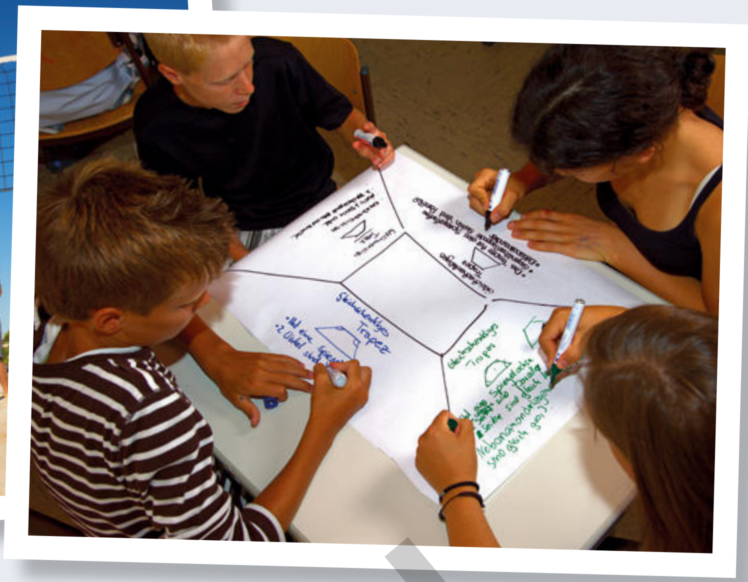


Abb. 1: Bewegungsabläufe setzen sich aus Einzelbewegungen (motorischen Elementarvorstellungen) zusammen. Diese werden im Langzeitgedächtnis gespeichert.

Abb. 2: Mathematisches Denken und Handeln beruht auf Vorstellungen, die ebenfalls im Langzeitgedächtnis gespeichert und vernetzt sind.

- *Primäre Grundvorstellungen* haben ihren Ursprung in Handlungen mit realen Objekten; zum Beispiel „Hinzufügen“ (als GV der Addition) oder „Wegnehmen“ (als GV der Subtraktion). Diese Grundvorstellungen entwickeln sich schon lange vor der Schulzeit, z. B. aus dem spielerischen Umgang mit Spielsteinen, Äpfeln, Geld usw.
- *Sekundäre Grundvorstellungen* entwickeln sich im Unterricht und basieren auf dem Umgang mit mathematischen Objekten wie Termen, Gleichungen oder Funktionen. Ein Beispiel ist das *mentale Bewegen im Koordinatensystem*, wenn man in Gedanken die x-Achse durchläuft und die davon abhängige Änderung des Funktionswerts betrachtet. Dies entspricht der „Kovariation“ als einer der wichtigen Grundvorstellungen für funktionales Denken.

Welche Rolle spielen Grundvorstellungen im Mathematikunterricht?

Wie wir wissen, ist Lernen ein individueller und konstruktiver Prozess, der sich durch guten Unterricht unterstützen, aber nicht bis ins letzte Detail steuern lässt. Mathematische Begriffe und Verfahren können nicht einfach in das Denken der Schülerinnen und Schüler transferiert werden, sondern müssen über sinnvolle Erkundungen und Erklärungen, Übungen und Anwendungen erworben werden. Dabei entspricht das, was gelernt wird, nicht immer dem, was Lehrende vermitteln möchten. Ebenso ist es mit den Grundvorstellungen, welche wir vermitteln möchten, und den Vorstellungen, die sich bei den Lernenden tatsächlich ausbilden.

Insofern ist es sinnvoll zu unterscheiden, ob man von Grundvorstellungen im normativen oder im deskriptiven Sinne spricht:

Normativ formulierte Grundvorstellungen sind didaktische Leitlinien, die Deutungsmöglichkeiten eines mathematischen Inhalts oder Verfahrens beschreiben.

Deskriptiv ermittelte Schülervorstellungen geben Aufschluss über die individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodelle, die Lernende tatsächlich haben; diese weichen mehr oder weniger von den intendierten Grundvorstellungen ab.

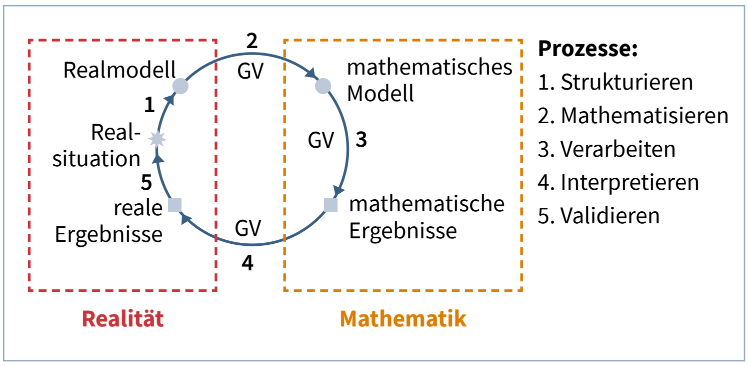


Abb. 3: Grundvorstellungen sind besonders wichtig bei der Übersetzung zwischen Realität und Mathemat

Im Idealfall entwickeln sich aus den vom Unterricht intendierten (normativen) Grundvorstellungen auch entsprechende tragfähige Vorstellungen der Lernenden.

Abb. 4 zeigt die Unterrichtsschritte und die individuellen Lernschritte in ihrem Zusammenspiel: Am Beginn steht die Überlegung, welche Grundvorstellungen für die Vermittlung bestimmter Inhalte oder Verfahren sinnvoll sind. Daraus folgt die Entwicklung geeigneter Lernkontexte als Verstehensanker, die das Vorwissen der Lernenden aktivieren und zum neuen Inhalt führen. So können die Lernenden den Lernkontext erfassen, tragfähige Grundvorstellungen aufbauen und nach entsprechenden Übungs- und Anwendungsphasen den Begriff bzw. das Verfahren verstehen. In diesem Sinne kann man sagen:

> **Grundvorstellungen**
> sind anschauliche Deutungen eines mathematischen Begriffs, die diesem Sinn geben und Verständnis ermöglichen.

Die Entwicklung von Grundvorstellungen erstreckt sich vom Kindergarten bis zur gymnasialen Oberstufe und darüber hinaus. Dementsprechend gibt es Grundvorstellungen von verschiedener Komplexität, die wir im Folgenden exemplarisch aufzeigen möchten. Wir betrachten zunächst elementare Grundvorstellungen am Beispiel des Übergangs vom Rechnen mit natürlichen Zahlen zur Bruchrechnung.

Elementare Grundvorstellungen von natürlichen Zahlen und Brüchen

Addieren – in verschiedenen Situationen

Die Addition ist die erste Grundrechenart. **Abb. 5** gibt einen Überblick über die für die Addition relevanten Grundvorstellungen (als Wurzeln) und ihre Anwendungssituationen (als darüber liegende Äste). Beginnen wir mit der ersten Sachsituation von links: Lilly hat 3 €, ihre Mutter gibt ihr 4 € hinzu. Wie viel Euro hat Lilly insgesamt? Die Situation entspricht der Vorstellung des *Hinzufügens*: Die Ausgangssituation ist ein Zustand, dann erfolgt eine Änderung, das Ergebnis ist wieder ein Zustand. Wir haben die Struktur Zustand–Änderung–Zustand, kurz Z–Ä–Z.

Lilly bekommt von Onkel Kevin 3 € und von Tante Chantal 4 € … Hier haben wir die Struktur Änderung–Änderung–Änderung, zwei Änderungen werden zu einer Gesamtänderung zusammengefasst.

Lilly hat 3 €, Marc hat 4 €. Wie viel Euro haben sie zusammen? Hier passiert nichts, es ist eine statische Situation. Man stellt sich nur vor, wie viel beide zusammen haben. Diese Vorstellung ist abstrakter als die ersten beiden und entspricht der mengentheoretischen Vereinigung.

Lilly hat von ihrem Taschengeld 4 € ausgegeben, jetzt hat sie noch 3 €. Wie viel hatte sie vorher? Dies ist für Lernende die schwierigste Situation, weil die Oberflächenstruktur des Textes eine Subtraktion darstellt, die Tiefenstruktur der Aufgabe jedoch eine Addition erfordert. Es handelt sich um eine Umkehraufgabe, die Rückwärtsrechnen erfordert.

Subtrahieren – in verschiedenen Situationen

Nun zur Subtraktion (**Abb. 6**). Hier haben wir die Vorstellung des *Wegnehmens* und die Struktur Z–Ä–Z. Bei den nächsten zwei Beispielen geht es um den Vergleich von Änderungen und Zuständen. Bei der Situation Ä–Ä–Ä geht es um den Unterschied zweier Änderungen. Bei der Situation Z–Z–Z wird nichts weggenommen, es ist eine statische Situation des Vergleichs. Bei der letzten Situation handelt es sich wieder um die Umkehraufgabe; dem entspricht die Vorstellung des *Ergänzens*, die manchen schwerfällt, für das Rechnen jedoch wichtig ist.

Multiplizieren und Dividieren

Betrachten wir noch kurz Multiplikation und Division. Die wichtigste Grundvorstellung des

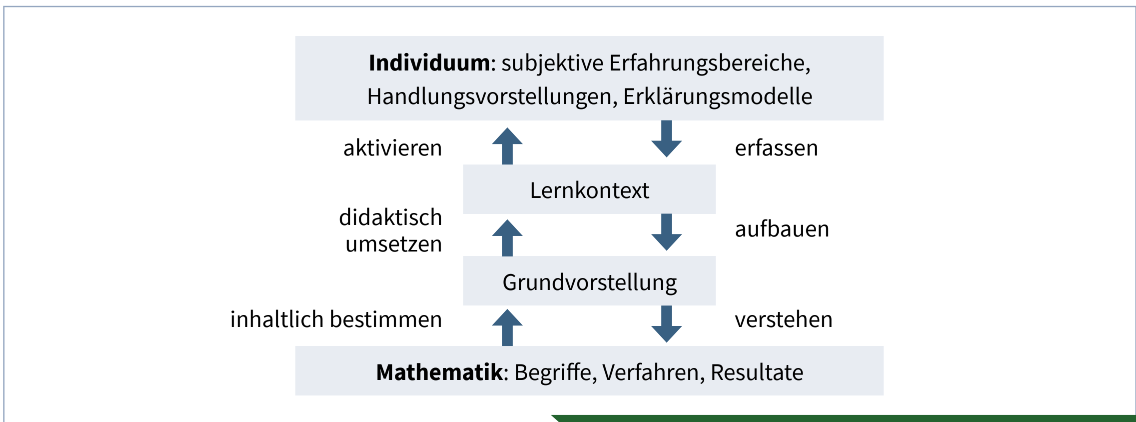


Abb. 4: Unterrichtliche Schritte (links) und individuelle Lernschritte (rechts) im Zusammenspiel

rafik: © Friedrich Verlag GmbH

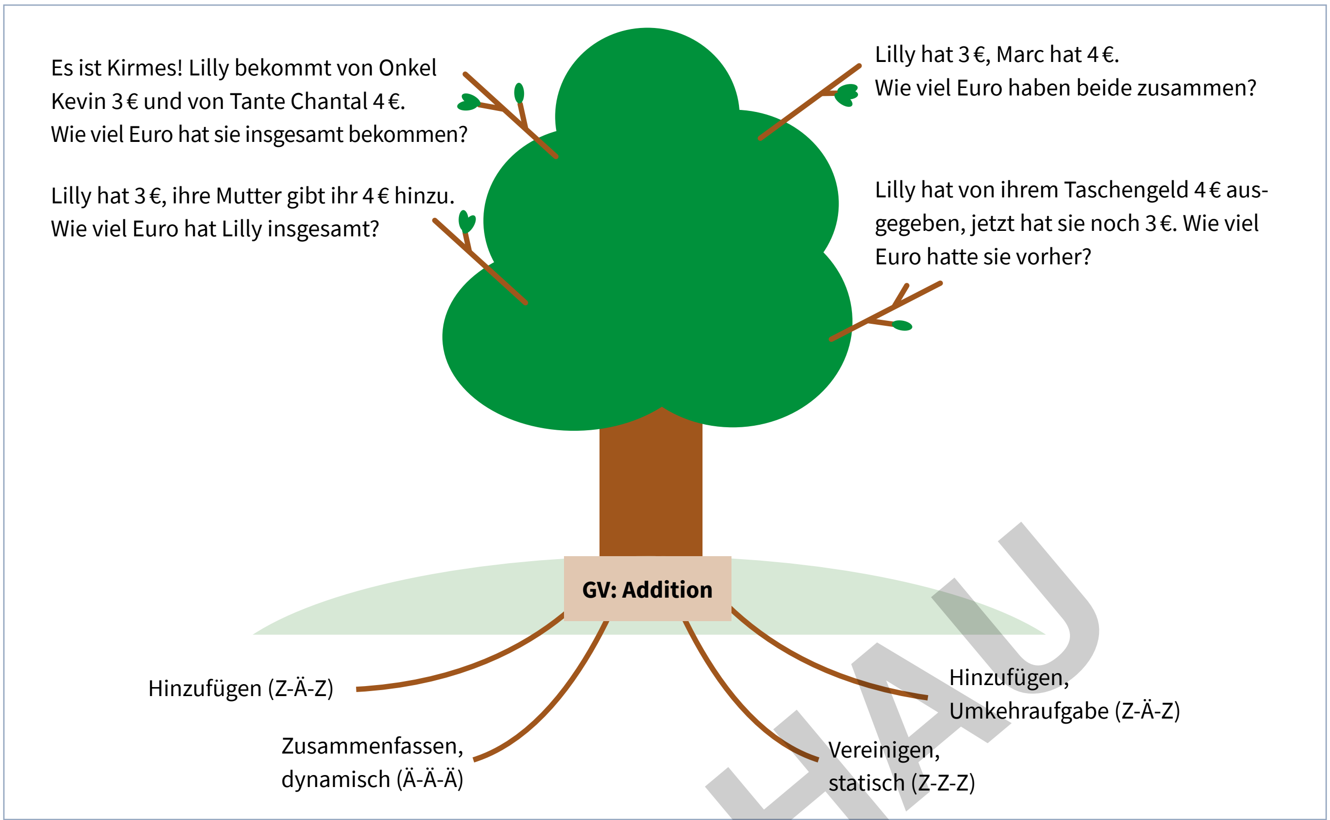


Abb. 5: Grundvorstellungen zur Addition (mit Z = Zustand, Ä = Änderung) und entsprechende Aufgaben

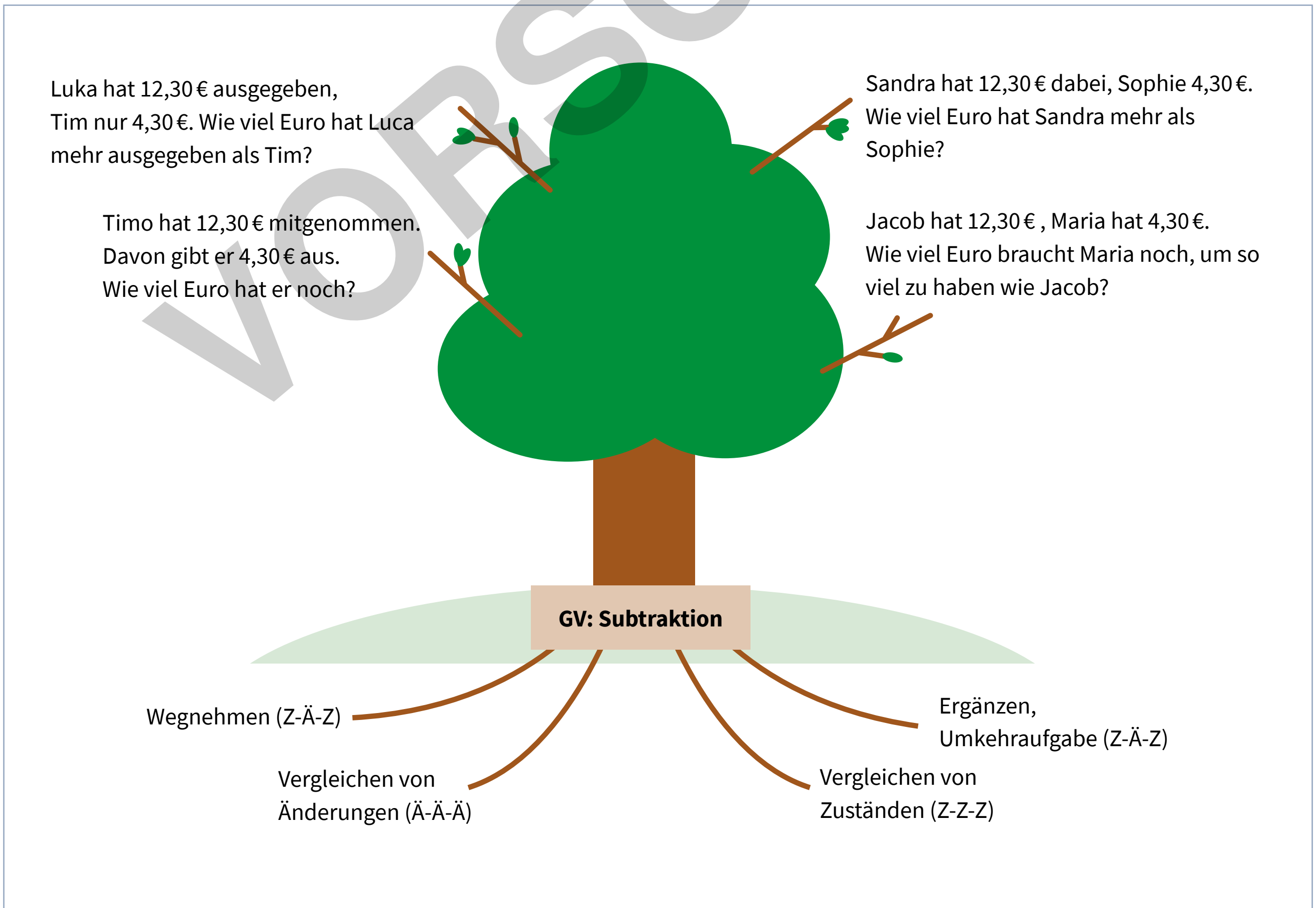


Abb. 6: Grundvorstellungen zur Subtraktion (mit Z = Zustand, Ä = Änderung) und entspre...

Verständnisvoll lernen

Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen

Werden mathematische Sachverhalte komplexer, greifen wir auf auf elementare Grundvorstellungen zurück und vernetzen diese. Passende Kontexte als „Verständnisanker" helfen bei Aufbau und Rekonstruktion der Grundvorstellungen.

JÜRGEN ROTH, RUDOLF VOM HOFE

Elementare Grundvorstellungen bilden die Basis für die Entwicklung von inhaltlichem Verständnis. Da mathematisches Wissen kumulativ aufgebaut ist, reichen diese aber nicht für alle Bereiche der Mathematik aus. Vielmehr greifen Grundvorstellungen zu subjektiv neuen mathematischen Inhalten oft auf elementare Grundvorstellungen zurück und vernetzen sie miteinander. *Vernetzte Grundvorstellungen* entwickeln sich anhand einer prototypischen Situation, in der wechselseitigen Interpretation dieser Situation und den Repräsentationen des ihr innewohnenden mathematischen Sachverhalts. Solche prototypischen Situationen, an denen Grundvorstellungen ausgebildet und rekonstruiert werden können, nennen wir Verständnisanker.

Verständnisanker als Unterrichtselement

Spätestens dann, wenn die notwendigen Vernetzungen von Grundvorstellungen komplexer werden, sollte mit Verständnisankern gearbeitet werden. Verständnisanker können auch schon weit vorher beim Erarbeiten und Aktivieren von Grundvorstellungen und beim Verständnisaufbau eines mathematischen Sachverhalts zielführend sein.

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellung und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint: Alle wesentlichen Strukturelemente zum mathematischen Verständnis kommen in dieser Situation vor und können daran gedeutet werden.
- Eine Situation eignet sich als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können einen Verständnisanker aufbauen und in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, darauf zurückkommen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

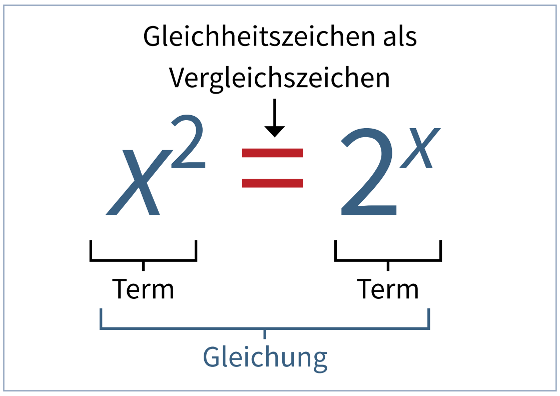
Grundvorstellungen vernetzen in der Sek. I am Beispiel Gleichungen

Bei den Grundvorstellungen zu Gleichungen (nach Hischer 2021) handelt es sich um vernetzte Grundvorstellungen. Gleichungen bestehen aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind und in der Regel Variablen enthalten (in **Abb. 1** die Variable x). Zum Ausbilden von Grundvorstellungen zu Gleichungen, und damit zur Verständnisentwicklung zu Gleichungen, muss folglich auf *Grundvorstellungen* zum *Gleichheitszeichen*, zu *Variablen* und zu *Termen* vernetzend zurückgegriffen werden.

Es gibt zwei *Grundvorstellungen zu Gleichungen*, die grundlegend verschiedene Verwendungsweisen von Gleichungen adressieren (Hischer 2021): *„Gleich-Sein"* und *„Gleich-Werden"* (vgl. **Abb. 2**).

GV1 zu Gleichungen: Feststellen einer Gleichheit

Die erste Grundvorstellung zu Gleichungen ist das *Feststellen einer Gleichheit* (*„Gleich-Sein"*). So wird mit



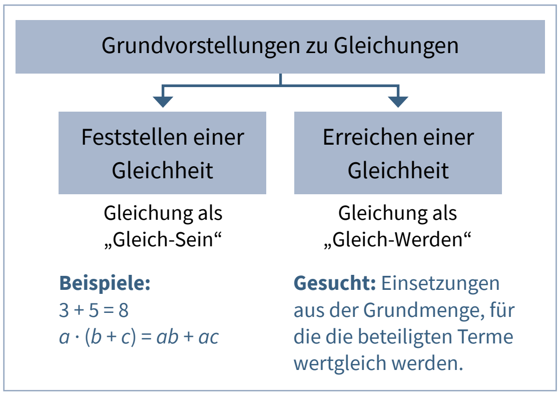


Abb. 2: Grundvorstellungen zu Gleichungen (nach Hischer 2021)

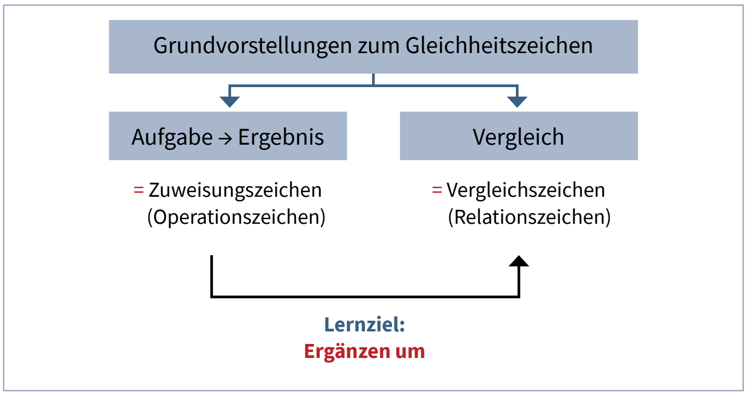


Abb. 3: Grundvorstellungen zum Gleichheitszeichen

Gleichungen ohne Variable festgestellt, dass etwa die Terme 3 + 5 und 8 wertgleich sind. Oder mit Gleichungen, wie sie in Rechengesetzen (Assoziativgesetz, Distributivgesetz usw.) vorkommen, wird ausgedrückt, dass die beiden Terme auf der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens für alle möglichen Einsetzungen aus der Grundmenge für die vorkommenden Variablen wertgleich sind.

GV2 zu Gleichungen: Erreichen einer Gleichheit

Bei der zweiten Grundvorstellung zu Gleichungen, dem *Erreichen einer Gleichheit* („*Gleich-Werden*“), werden alle Einsetzungen für die Variablen der Gleichung aus der Grundmenge gesucht, für die die Terme auf der linken und der rechten Seite der Gleichung wertgleich werden (z. B. $x+3=6$). Als Verständnisanker hierfür eignet sich: *Suche zu den Funktionstermen x^2 und 2^x die x-Werte, für die die Werte beider Funktionsterme gleich sind!* (vgl. **Abb. 1**).

Grundvorstellungen zu Variablen

Die Grundvorstellung *Gleich-Werden* zu Gleichungen nutzt die Grundvorstellung *Unbekannte* zu Variablen, während die Grundvorstellung *Gleich-Sein* zu Gleichungen die Grundvorstellung *Unbestimmte* bzw. *allgemeine Zahl* zu Variablen benötigt (vgl. **Tab. 1**).

Grundvorstellung	**Erläuterung der Grundvorstellung zu Variablen**
Unbestimmte bzw. allgemeine Zahl	Die Variable ist eine allgemeine Zahl, deren Wert nicht gegeben bzw. zunächst nicht von Interesse ist. (Beispiel: $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b aus $\mathbb{R}$)
Unbekannte	Die Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl (oder einen Term), deren Wert nicht bekannt ist, aber prinzipiell bestimmt werden kann, etwa durch regelgeleitete Umformungen. (Beispiel: $2x + 1 = 7$ kann zu $x = 3$ bestimmt werden.)
Veränderliche	Die Variable ist eine Zahl oder Größe, die verschiedene Werte aus einem festgelegten Bereich annehmen kann, also veränderlich ist. (Beispiel: $x \mapsto 2x + 1$)

Tab. 1: Grundvorstellungen zu Variablen (vgl. Weigand u. a. 2022)

Grundvorstellungen zum Gleichheitszeichen

Eine weitere elementare Grundvorstellung wird hier implizit mit aufgegriffen, nämlich die vom *Gleichheitszeichen* als *Vergleichszeichen* (bzw. *Relationszeichen* bei Barzel u. a. 2021, s. **Abb. 3**), das auf den Vergleich der Werte der beiden Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen fokussiert. Dies ist bedeutsam, da Lernende aus der Grundschule häufig ausschließlich die andere Grundvorstellung, nämlich *Gleichheitszeichen* als *Zuweisungszeichen* (bzw. *Operationszeichen* bei Barzel u. a. 2021), verinnerlicht haben und es in diesem Sinn nur als Aufforderung zum „Ausrechnen“ interpretieren. Diese Grundvorstellung ist nur begrenzt tragfähig und muss sehr früh, idealerweise schon in der Grundschule, spätestens aber vor dem expliziten Arbeiten mit Gleichungen, ergänzt werden um die Grundvorstellung *Gleichheitszeichen als Vergleichszeichen*. Woran ist erkennbar, dass die Grundvorstellung *Gleichheitszeichen als Vergleichszeichen* individuell noch nicht ausgebildet wurde? Als ein Indiz kann gewertet werden, wenn Lernende beim Gleichungsumformen nicht nur zwischen die beiden umgeformten Terme ein Gleichheitszeichen setzen, sondern bei jeder Umformung auch an den Anfang der Zeile ein weiteres Gleichheitszeichen platzieren.

Grundvorstellungen zu Termen

Gleichungen vergleichen jeweils zwei Terme miteinander – daher spielen auch die elementaren Grundvorstellungen zu Termen, nämlich *Term als Rechenschema* und *Term als Bauplan* (s. Siller/Roth 2016 und **Tab. 2**) beim Arbeiten mit Gleichungen eine wichtige Rolle. Insgesamt wird deutlich, dass Grundvorstellungen zu Gleichungen auf mehrere elementare Grundvorstellungen aufbauen und diese vernetzen.