Form und Raum

Winkelsätze und Winkelsummensatz – Übungen zum Erschließen und Anwenden

Ein Beitrag von Ann-Cathrin Bremer und Birgit Bremer

© Hakase_/iStock/Getty Images Plus

In dieser Unterrichtseinheit geht es um das Entdecken und Erschließen von Winkelsätzen und dem Winkelsummensatz im Dreieck. Ein Eingangstest, verschiedene Niveaustufen und Tipp-Karten helfen den Lernenden bei ihrem Lernprozess. Die Nutzung von *GeoGebra* unterstützt beim Erkunden der Themenbereiche. Zudem haben die Lernenden die Möglichkeit, auf *LearningApps* zurückzugreifen, was für Abwechslung während der Unterrichtseinheit sorgt.

KOMPETENZPROFIL

GeoGebra

Klassenstufe:	7/8
Dauer:	8 Unterrichtsstunden (Minimalplan 5)
Inhalt:	Winkelsätze, Winkelsummensatz
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), kommunizieren (K6)
Medien:	GeoGebra, LearningApps

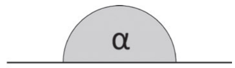
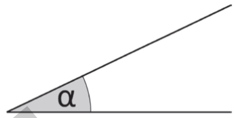
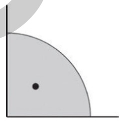
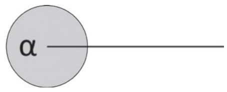
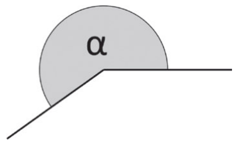
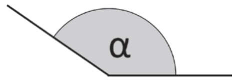
M 1

Winkelarten und parallele Geraden – Bin ich fit?

Aufgabe 1

Schneide die Kärtchen aus.
Ordne die richtige Winkelart, Winkelgröße und die passende Abbildung einander zu.
Überprüfe deine Lösung.
Klebe die Kärtchen richtig geordnet in dein Heft oder auf ein Extrablatt.

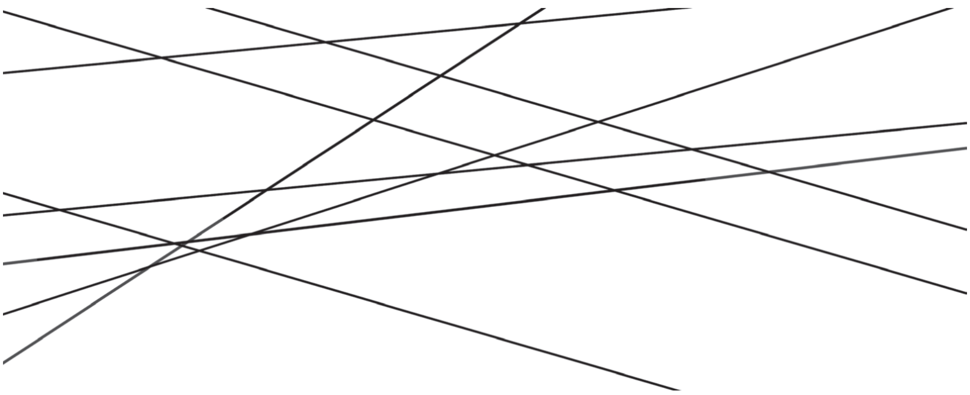
https://raabe.click/Winkel-messen

Nullwinkel	$\alpha = 180°$	
überstumpfer Winkel	$90° < \alpha < 180°$	
rechter Winkel	$0° < \alpha < 90°$	
spitzer Winkel	$180° < \alpha < 360°$	
gestreckter Winkel	$\alpha = 0°$	
stumpfer Winkel	$\alpha = 90°$	
Vollwinkel	$\alpha = 360°$	

Aufgabe 2

Markiere zueinander parallele Geraden mit derselben Farbe.

https://raabe.click/parallele-Geraden



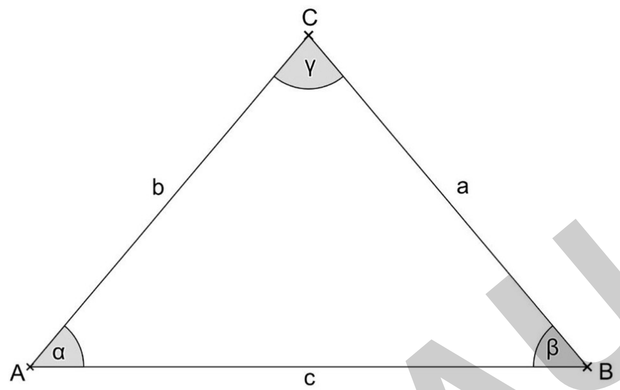
M 3 Einstieg: Dreiecke und deren Innenwinkelsumme

Aufgabe 1

a) **Miss** die Winkel α, β und γ und trage die Werte in die Tabelle ein.

b) **Berechne** die Summe der Winkel, indem du die Winkelgrößen von α, β und γ addierst. **Trage** das Ergebnis ebenfalls in die Tabelle **ein**.

c) **Miss** die Seiten a, b und c des Dreiecks und trage die Werte in die Tabelle ein.



Winkelgröße	α =	β =	γ =
Summe der Winkel	α + β + γ =		
Seitenlänge	a =	b =	c =

d) **Betrachte** die Ergebnisse in der Tabelle und **erkläre**, welchen Zusammenhang du bei diesem besonderen Dreieck feststellen kannst.

e) **Öffne** die GeoGebra-Datei *https://raabe.click/ggb-III54-M3A1e* und **verschiebe** den Punkt C entlang der Achse. Kannst du deine Beobachtung aus Aufgabe d weiterhin bestätigen?

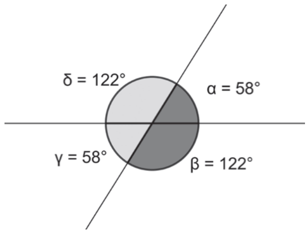
Ergebnissicherung: Merkblatt – Winkelsätze

M 5

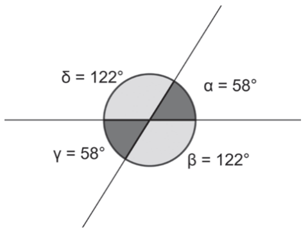
Nebenwinkel

An zwei sich schneidenden Geraden entstehen insgesamt vier Winkel. Zwei **nebeneinanderliegende Winkel** ergänzen sich zu **180°**. Man nennt sie **Nebenwinkel**.

Beispiel: *α ist ein Nebenwinkel von β und δ.*
γ und β bilden ein Nebenwinkelpaar.



Scheitelwinkel



An zwei sich schneidenden Geraden entstehen insgesamt vier Winkel. Zwei **gegenüberliegende Winkel** sind immer **gleich groß**. Man nennt sie **Scheitelwinkel**.

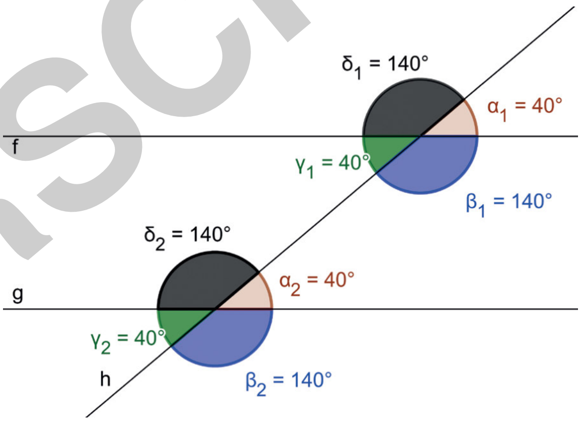
Beispiel: *α und γ sind Scheitelwinkel.*
δ und β bilden ein Scheitelwinkelpaar.

https://raabe.click/Scheitelwinkel-Nebenwinkel

Stufenwinkel

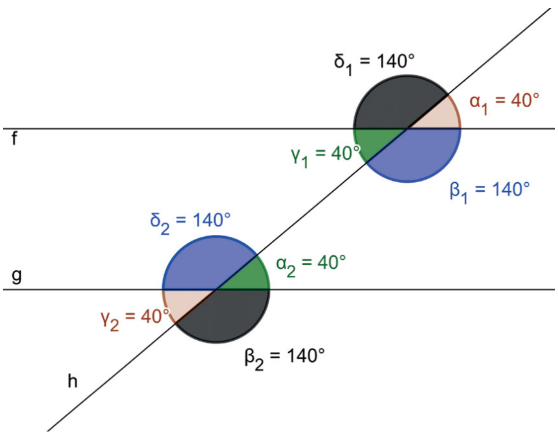
Wenn eine beliebige Gerade zwei **parallele Geraden** schneidet, entstehen insgesamt 8 Winkel. Winkel, die dieselbe Lage in Bezug auf die Geraden haben, werden als **Stufenwinkel** bezeichnet. Stufenwinkel sind immer **gleich groß**.

Beispiel:
α_1 und α_2 sind Stufenwinkel.



https://raabe.click/Stufenwinkel-Wechselwinkel

Wechselwinkel



Wechselwinkel sind eine Kombination aus Stufen- und Scheitelwinkel. Um einen Wechselwinkel zu finden, schaust du also zunächst, wo der entsprechende Stufenwinkel ist. Der Scheitelwinkel von diesem Stufenwinkel ist der Wechselwinkel. **Wechselwinkel** sind immer **gleich groß**.

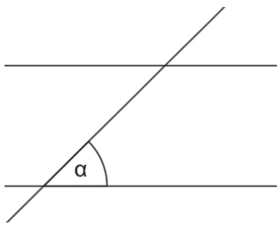
Beispiel:
α_1 und γ_2 sind Wechselwinkel.

Tippkarten zu „Innenwinkelsumme im Dreieck beweisen“ M 7

Tipp zu Aufgabe a)

Winkel werden mit griechischen Buchstaben beschriftet. Da ein Dreieck drei Winkel hat, werden meistens die ersten drei **griechischen Buchstaben** α, β und γ verwendet.
Beschriftungen im Dreieck erfolgen immer **gegen den Uhrzeigersinn**.

Tipp zu Aufgabe b)



Um beispielsweise den Wechselwinkel von α zu finden, kann es helfen, wenn du die Gerade des Dreiecks bei α verlängerst und eine Seite des Dreiecks ignorierst. So erhältst du das dir bekannte „Bild“ von zwei parallelen Geraden, die von einer Gerade geschnitten werden.

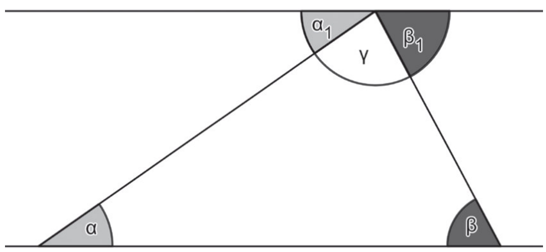
Tipp 1 zu Aufgabe c)

Beantwortet zunächst folgende Fragen (ihr könnt euch die Antworten auch auf einem extra Blatt notieren):

- Gibt es in eurer beschrifteten Zeichnung einen gestreckten Winkel?
  Falls ja, wie viel Grad hat ein gestreckter Winkel?
- Welche Eigenschaften haben Wechselwinkel und wo in der Zeichnung findet ihr Wechselwinkel?

Tipp 2 zu Aufgabe c)

Die Winkel α_1, γ und β_1 bilden gemeinsam einen gestreckten Winkel und sind somit zusammen 180°. Die Winkel α_1 und α genauso wie die Winkel β und β_1 stellen Wechselwinkel dar.
Überlegt nun, was das für den Winkel γ bedeutet.
Was kann man somit über die Innenwinkelsumme in einem Dreieck aussagen?



Tipp 3 zu Aufgabe c)

Schau dir eins der beiden Videos an.

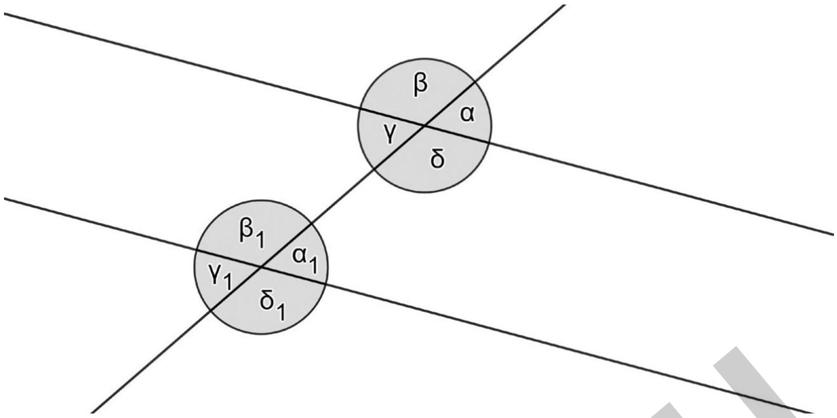
https://raabe.click/Winkelsumme-Dreieck-1	https://raabe.click/Winkelsumme-Dreieck-2

M 10

Übung: Winkelsätze anwenden

Aufgabe 1

a) **Berechne** die fehlenden Winkel in der Tabelle mithilfe der Abbildung.

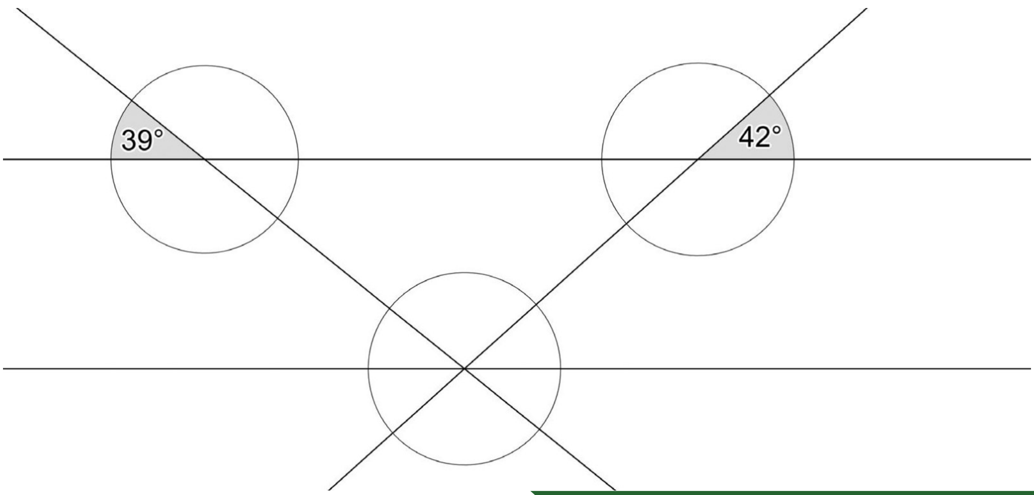


α	β	γ	δ	α_1	β_1	γ_1	δ_1
35°							

b) **Erkläre**, warum nur ein gegebener Winkel benötigt wird, um alle anderen Winkel zu berechnen.

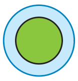
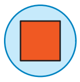
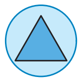
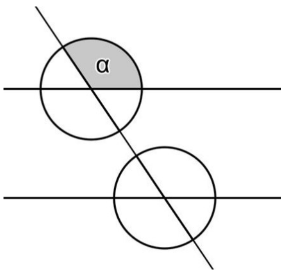
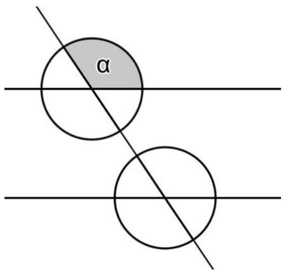
Aufgabe 2

Vervollständige die Abbildung, indem du die fehlenden Winkelgrößen ergänzt.



Bin ich fit? – Teste dich! M 13

In der folgenden Tabelle findest du Aufgaben, mit denen du herausfinden kannst, ob du das Thema verstanden hast. Du kannst zwischen drei Niveaustufen wählen.

		
1. **Kennzeichne …**  a) die Nebenwinkel von α mit Pünktchen b) den Scheitelwinkel von α mit Linien c) den Stufenwinkel von α mit einer hellen Farbe d) den Wechselwinkel von α mit einer dunklen Farbe	1. **Trage** die Größe aller Winkel in die Zeichnung **ein**. α beträgt 124°.  	1. **Vervollständige** die Lücken. Werden zwei parallele Geraden von einer weiteren Gerade geschnitten, dann existieren immer ________ Nebenwinkelpaare. Insgesamt entstehen ________ Winkel, wovon jeweils ________ gleich groß sind. Neben den Scheitelwinkeln sind auch ________________ winkel und ________________ winkel gleich groß.
2. Gegeben ist ein Dreieck. Zwei Winkel sind bekannt. **Berechne** den fehlenden Winkel. a) $\alpha = 12°$; $\beta = 111°$ b) $\beta = 20°$; $\gamma = 77°$ c) $\alpha = 47{,}6°$; $\gamma = 105{,}4°$	2. Gegeben ist ein Dreieck. Zwei Winkel sind bekannt. **Berechne** den fehlenden Winkel. a) $\alpha = 12{,}11°$; $\beta = 10{,}44°$ b) $\beta = 21°$; $\gamma = \beta$ c) $\alpha = \beta = \gamma$	2. **Begründe**, ob folgendes Dreieck existieren kann (extra Blatt). a) Die Winkelgröße von α und β ist eine natürliche gerade Zahl (z. B. 22°). Der dritte Winkel ist somit auch eine natürliche gerade Zahl. b) α beträgt 5°. Die beiden anderen Winkel sind stumpf. c) α beträgt 5°. Ein weiterer Winkel ist 84,5° groß. Der letzte Winkel ist stumpf.