Inhalt

Seite

Vorwort **4**

1 **Wachstum in Natur und Gesellschaft – Einführung** **5**

2 **Wachstumsformen im Diagramm (Blatt 1–2)** **6–7**

3 **Mathematische Definition der Begriffe Wachstum und Zerfall** **8**

4 **Lineares Wachstum und lineare Abnahme** **9–16**

4.1 Allgemeine mathematische Grundlagen 9

4.2 Einführungsbeispiel (Blatt 1–2) 10–11

4.3 Übungsaufgaben (Blatt 1–5) 12–16

5 **Potenzielles Wachstum und potenzielle Abnahme** **17–29**

5.1 Allgemeine mathematische Grundlagen (Blatt 1–4) 17–20

5.2 Einführungsbeispiel (Blatt 1–2) 21–22

5.3 Übungsaufgaben (Blatt 1–7) 23–29

6 **Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall** **30–50**

6.1 Eine mathematische Geschichte zur Einführung (Blatt 1–2) 30–31

6.2 Ein mathematisches Experiment 32

6.3 Der Klassiker: Die Legende von der Erfindung des Schachspiels 33

6.4 Exponentialfunktionen – Allgemeine mathematische Grundlagen (Blatt 1–8) 34–41

6.5 Grundlagen zur Berechnung von exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozessen 42

6.6 Beispiel zur Anwendung von Exponentialfunktionen (Blatt 1–2) 43–44

6.7 Übungs- und Anwendungsaufgaben (Blatt 1–6) 45–50

7 **7. Ausblick auf logistisches Wachstum (Blatt 1–4)** **51–54**

8 **8. Bezug zur Coronapandemie** **55–66**

8.1 Beschreibung der Pandemie mit mathematischen Kenngrößen (Blatt 1–9) 55–63

8.2 Wachstum – Kreuz und Quer durch die Pandemie (Blatt 1–3) 64–66

Lösungen **67–87**

Bildquellen **88**

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929

KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Vorwort

Leben und Wachstum – ob erwünschtes oder unerwünschtes Wachstum – sind untrennbar miteinander verbunden, bedingen einander.

Auch in der unbelebten Natur findet Wachstum statt.

Die Aufgabe, Wachstumsprozesse zu beschreiben und mittels Wachstumsfunktionen zu berechnen, ist eine Herausforderung für die interdisziplinäre Zusammenarbeit von Mathematikern, Informatikern, Mikrobiologen, Epidemiologen, Medizinern, Ökonomen und Technikern.

In diesem Band sollen elementare mathematische Grundlagen wiederholt und ihre Anwendung bei der Berechnung interessanter, motivierender Wachstums- und Zerfallsprozesse gezeigt und geübt werden.

Lineares, potenzielles und exponentielles Wachstum mit Ausblick auf logistisches Wachstum werden als idealisierte Wachstumsformen, die in Grenzen unter bestimmten Bedingungen gelten, behandelt.

Besondere Bedeutung kommt dabei dem exponentiellen Wachstum zu. Das zunächst schleichende Anwachsen der Bestandsgröße, welches sich nach einer bestimmten Zeit in ein immenses Anwachsen dieser Größe wandelt, spiegelt natürliches Wachstum – allerdings nur bis zu einer bestimmten Sättigungsgrenze – wider. Analoges gilt für Zerfallsprozesse. Interessante Anwendungsbeispiele aus den Bereichen Kernphysik und Altertumsforschung sollen die Schüler* motivieren, ihre Kenntnisse der Exponential- und Logarithmusfunktion zu festigen.

Als „Klassiker" aus dem Geschichtsbuch der Mathematik wird den Schülern als einfaches, aber überzeugendes Beispiel die Legende von der Erfindung des Schachspiels vorgestellt. Denn so, wie die Anzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett nach der Vorschrift des Erfinders anwächst, vermehren sich auch Bakterien und Viren.

Dieser Sachverhalt bietet einen passenden aktuellen und fachübergreifenden Bezug zur Corona-Pandemie. Die Begriffe Sieben-Tage-Inzidenz und R-Faktor werden als Größen zur Beschreibung der Ausbreitung der Pandemie erklärt und einfache Aufgabenbeispiele zum Umgang mit diesen Größen angeboten. Rätsel zu Begriffen rund um die Pandemie runden dieses fachübergreifende Kapitel ab.

Das Aufgabenmaterial in diesem Heft ist sowohl zur Ergänzung des Unterrichts als auch für Hausaufgaben und Freiarbeit gedacht.

Viel Erfolg bei der Beschäftigung mit Wachstum wünschen das Team des Kohl-Verlags und

Barbara Theuer

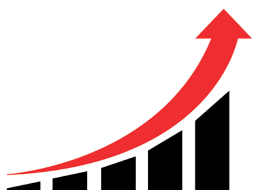
* *Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird im Folgenden die männliche Form Schüler bzw. Lehrer usw. verwendet. Gemeint sind damit selbstverständlich auch die weiblichen Personen.*

1 Wachstum in Natur und Gesellschaft – Einführung

Wachstum gehört zu den elementaren und bedeutsamen Prozessen in der unbelebten, besonders aber in der belebten Natur.
So wachsen Bäume, Pflanzen und Früchte zum Nutzen der Menschen. Die Körpermasse von Zuchttieren nimmt bei guter Fütterung zu. Haare wachsen, was erwünscht ist oder als lästig empfunden wird. Algen wachsen infolge der Erderwärmung und verpesten die Meere. Auch mikroskopisch kleine Lebewesen, wie zum Beispiel Bakterien oder winzige, leblose Viren, vermehren sich unter günstigen Bedingungen sehr stark exponentiell. Neben nützlichen Bakterien greifen allerdings viele Bakterienarten und besonders auch Viren bei einer Übertragung auf den Menschen dessen Gesundheit an. Steckt ein erkrankter Mensch weitere Menschen an, spricht man von der Ausbreitung der Infektion – die Zahl der Infizierten wächst bei fehlenden Maßnahmen zum Infektionsschutz exponentiell.
Auch in der Technik gibt es Wachstum. So ist zum Beispiel der Eiffelturm an heißen Sommertagen bis zu 30 cm höher als an kalten Wintertagen, da sich Stahl bei Erwärmung ausdehnt. Während der Eiffelturm beliebig in die Höhe wachsen kann, ohne Schaden anzurichten, führt eine unerwünschte Wärmeausdehnung von Baumaterialien mitunter zur Zerstörung von Bauwerken, Brücken usw. Bei Flüssigkeitsthermometern hingegen wird die Wärmeausdehnung einer Flüssigkeit zur Anzeige der Temperatur angewendet. In diesen Fällen liegt lineares Wachstum zugrunde.
Untersucht man in der Physik den Zuwachs des Weges bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit, so erkennt man quadratisches Wachstum. In der Ökonomie und im Finanzwesen spielen Wirtschaftswachstum und Anwachsen von Kapital eine bedeutende Rolle.
Die Mathematik hat sich der Aufgabe angenommen, Wachstumsprozesse zu modellieren und die Wachstumsgrößen mittels mathematischer Funktionen zu berechnen, um beispielsweise Biologen, Medizinern, Epidemiologen und Ökonomen Voraussagen über die Entwicklung dieser Größen zu ermöglichen.

EA **Aufgabe 1**: *Gib je ein Beispiel für Wachstum aus drei verschiedenen Bereichen an und charakterisiere die Art des Wachstums. Nutze dazu auch den Einführungstext.*

EA **Aufgabe 2**: *Informiere dich im Internet über die Entwicklung der Weltbevölkerung. Mache Notizen über ihr Wachstum seit 1950.*

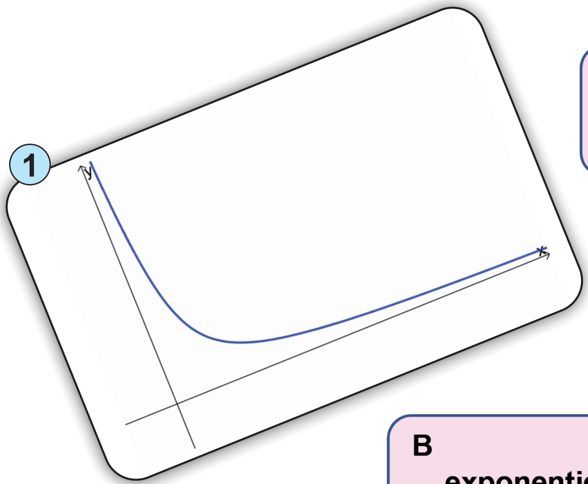


Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

2 Wachstumsformen im Diagramm (Blatt 1)

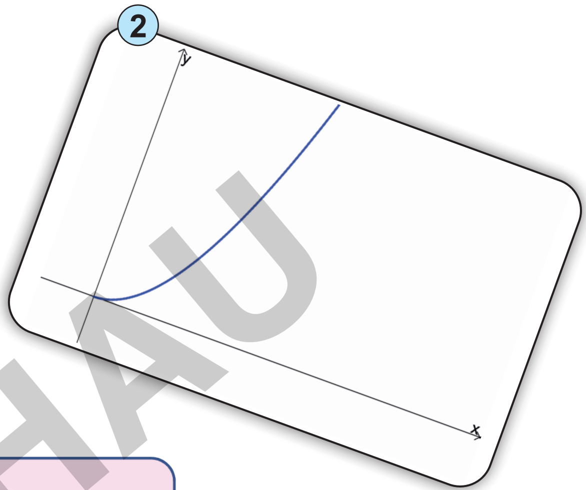
EA **Aufgabe 1**: *Ordne den Diagrammen die passende Beschreibung zu.*

1



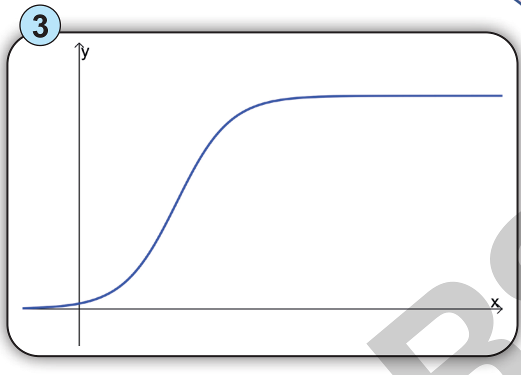
A
lineares Wachstum

2



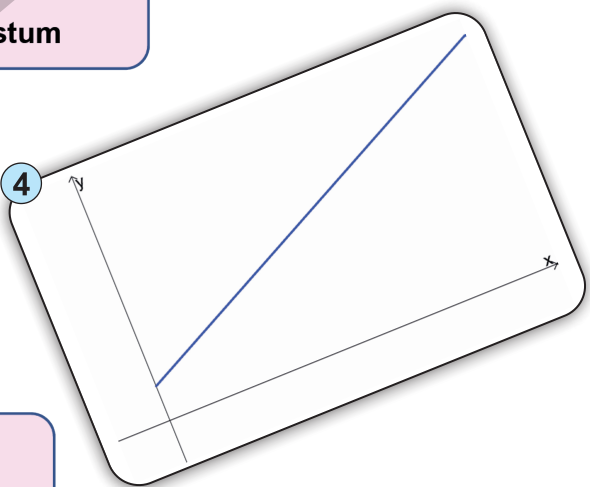
B
exponentielles Wachstum

3



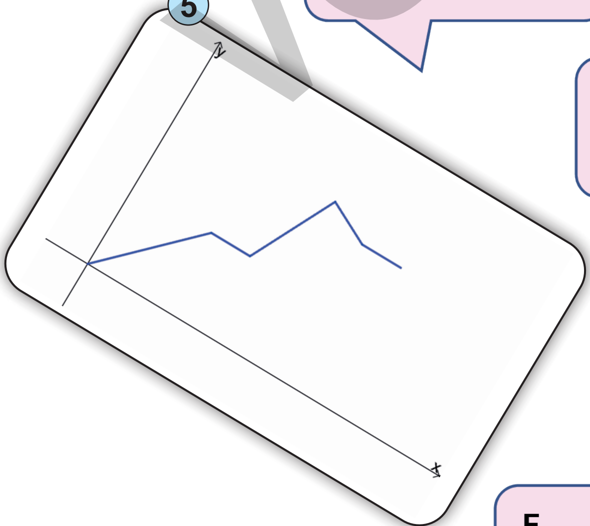
C
kein Wachstum

4



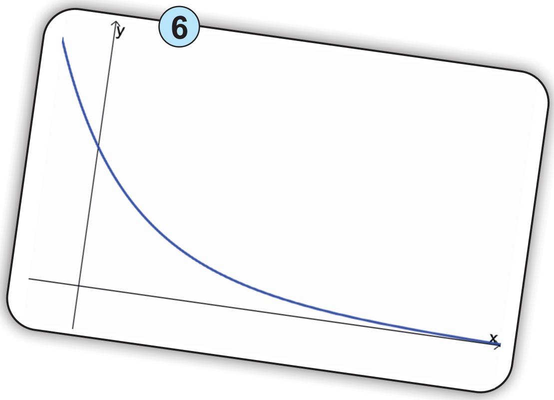
D
quadratische Abnahme

5



E
lineare Abnahme

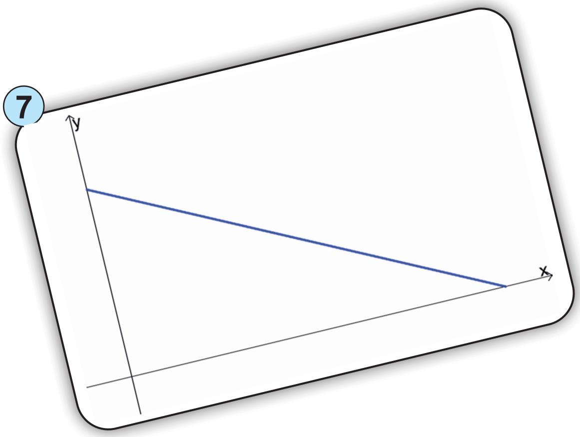
6



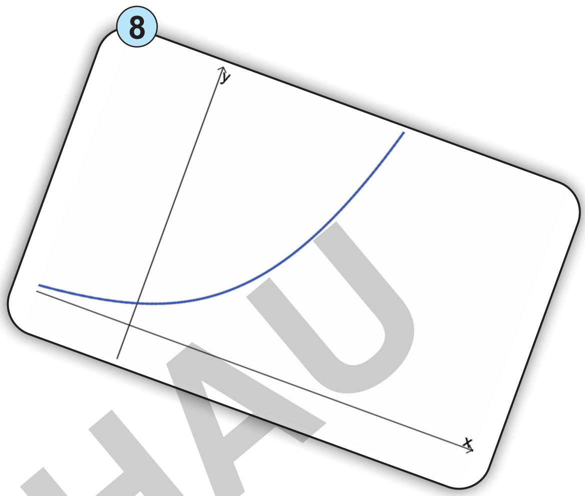
F
quadratisches Wachstum

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG

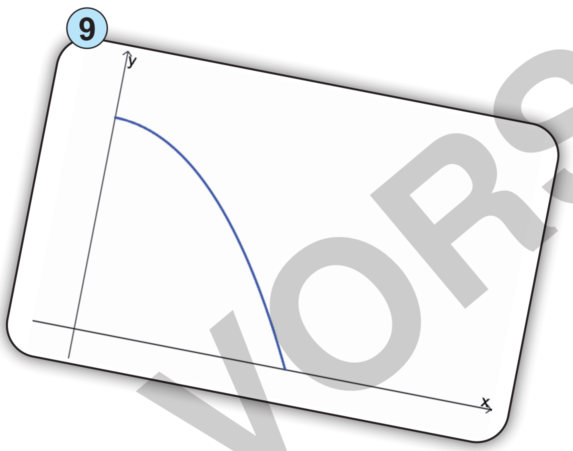
2 Wachstumsformen im Diagramm (Blatt 2)



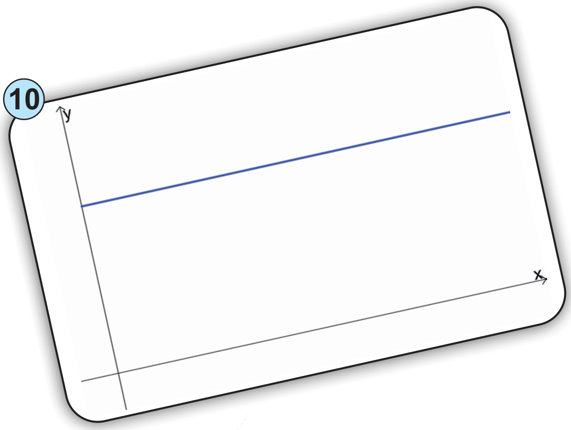
G
logistisches Wachstum



H
Abnahme bei indirekter Proportionalität



I
unregelmäßiges Wachstum



J
exponentieller Zerfall

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG

3 Mathematische Definition der Begriffe Wachstum und Zerfall

Wachstum
Unter dem allgemeinen Begriff Wachstum versteht man das zeitliche Verhalten einer Bestandsgröße b (Messgröße).
Wenn gilt: Aus $t_1 < t_2 \rightarrow b(t_1) < b(t_2)$,
spricht man von Wachstum (positivem Wachstum).
Wenn gilt: Aus $t_1 < t_2 \rightarrow b(t_1) > b(t_2)$,
spricht man von Abnahme bzw. Zerfall (negativem Wachstum).

Wachstumsfunktion
Eine Wachstumsfunktion b(t) beschreibt einen Bestand b als Funktion der Zeit t.
Um Wachstumsfunktionen zu beschreiben, werden folgende Begriffe verwendet:

Anfangsbestand (Anfangswert) b_0
Dieser gibt den Wert zu Beginn der Messung an und zeigt sich im Funktionsgraph als Ordinate des Schnittpunktes der Wachstumsfunktion mit der y-Achse.

Wachstumsrate
Bei Wachstumsvorgängen wird die momentane ***Änderungsrate*** so genannt. Die Berechnung der Änderungsrate erfolgt mittels erster Ableitung der Wachstumsfunktion b'(t).
Bei linearem Wachstum ist die Wachstumsrate zu jedem beliebigen Zeitwert konstant.
Die Wachstumsrate ist ein Maß für die ***Wachstumsgeschwindigkeit***.

Halbwertszeit (Verdopplungszeit)
Das ist die Zeitspanne, in der sich ein Bestand halbiert (verdoppelt) hat.

EA **Aufgabe 1**: *Erläutere die Begriffe (Tabelle oben) am Beispiel des Kapitalwachstums bei einer Anlage nach Verzinsung mit Zinseszins.*

EA **Aufgabe 2**: *Nenne je ein praktisches Beispiel für die Bedeutung der Wachstumsgrößen Halbwertszeit und Verdopplungszeit.*

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG

6.6 Beispiel zur Anwendung von Exponentialfunktionen (Blatt 2)

Ötzis Alter

Im Jahr 1991 gab es in den Ötztaler Alpen einen sensationellen Steinzeitfund.
Die fossile menschliche Leiche nannte man ***Ötzi***.
Mit Hilfe der Radiocarbonmethode gelang es den Forschern, das Alter des Fundes zu bestimmen.

Aufgabe:

Berechne das Alter von Ötzi, wenn bekannt ist, dass der Anteil des radioaktiven Isotops ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, welches eine Halbwertszeit von 5730 Jahren hat, zum Zeitpunkt der Entdeckung auf 53 % des Ausgangswertes abgesunken war.

Lösung:

Es seien
N_0 der Ausgangswert für die Anzahl der ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$-Atome vor Absterben des fossilen Organismus, N die Anzahl der ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$-Atome zum Zeitpunkt des Fundes,
t die Zeitdauer in Jahren vom Absterben des fossilen Fundes bis zur Entdeckung (Alter von Ötzi), $T_{1/2}$ die Halbwertszeit in Jahren.
Dann lautet die Zerfallsfunktion: $\mathbf{N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}}$

1. Schritt:
Berechnung der Wachstumskonstante k aus bekannter Halbwertszeit $T_{1/2} = 5730$ Jahre

Ansatz: $\frac{1}{2} \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-k \cdot t} \quad \rightarrow$

$$\frac{1}{2} = e^{-k \cdot 5730} \quad \rightarrow$$

$$-k \cdot 5730 = \ln \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad k \approx 0{,}0001209681$$

2. Schritt:
Berechnung des Alters t von Ötzi

Ansatz: $\frac{53}{100} \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-0{,}0001209681 \cdot t} \quad \rightarrow$

$$\frac{53}{100} = e^{-0{,}0001209681 \cdot t} \quad \rightarrow$$

$$-0{,}0001209681 \cdot t = \ln \frac{53}{100}$$

$$t \approx 5248$$

Steinzeitmensch

Das fossile Alter von Ötzi beträgt etwa 5200 bis 53

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG

6.7 Übungs- und Anwendungsaufgaben (Blatt 1)

EA

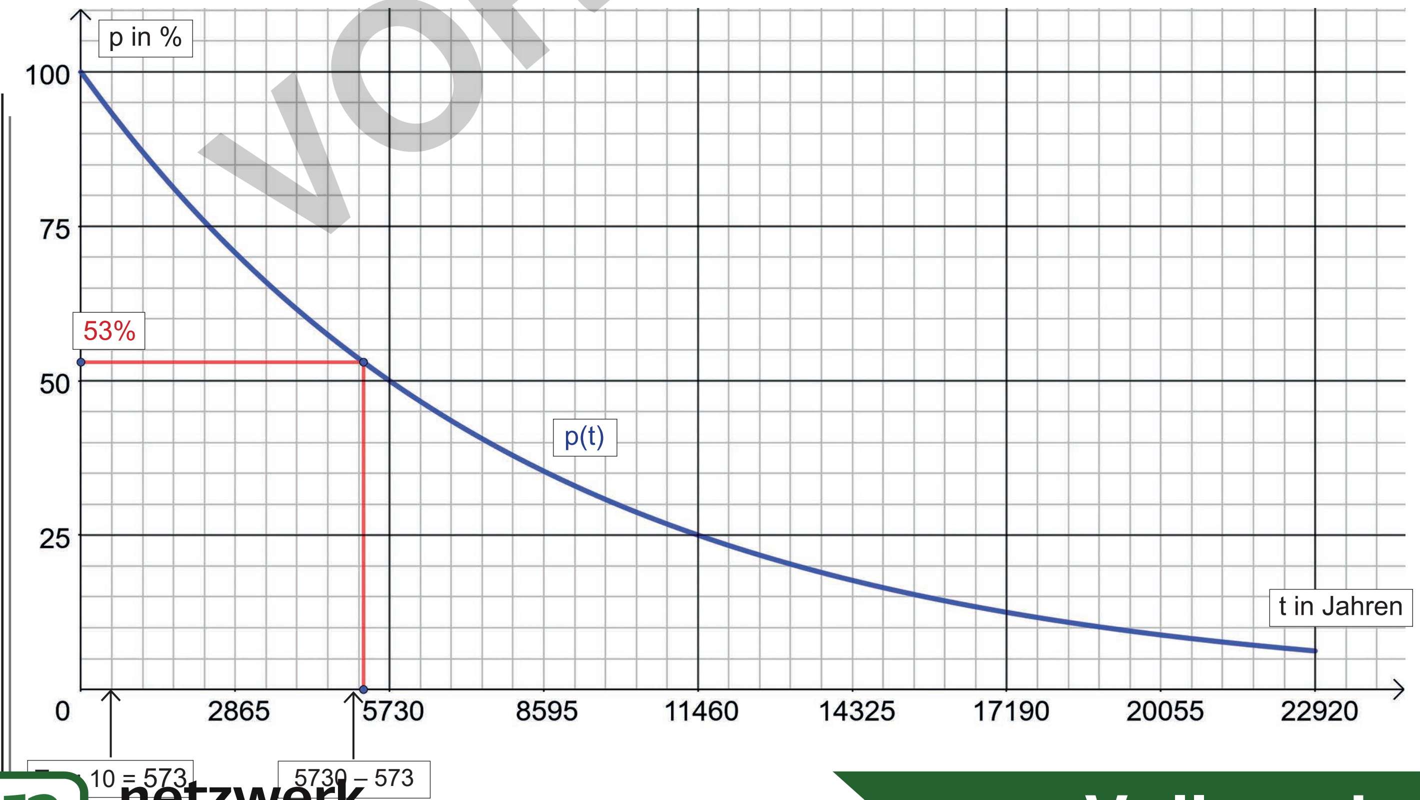
Aufgabe 1: *Das nachfolgende Diagramm beschreibt mit dem Graph der Funktion p(t) den Zerfall des radioaktiven Kohlenstoffisotops $^{14}_{6}C$.*

a) *Lies das fossile Alter von Ötzi näherungsweise aus dem Diagramm ab.*

b) *Bestimme näherungsweise das Alter eines Fundes mit 20 % $^{14}_{6}C$-Gehalt mit Hilfe des Diagramms. Markiere entsprechende Hilfslinien.*

c) *Berechne das Alter dieses Fundes (siehe oben) rechnerisch.*

Zerfall von $^{14}_{6}C$



Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG

7 Ausblick auf logistisches Wachstum (Blatt 1)

Rein exponentielles Wachstum findet bei realen natürlichen Prozessen nur in einem bestimmten, begrenzten Zeitraum statt, da sich reale Wachstumsprozesse infolge unzureichender, sich mit der Zeit verschlechternder Umgebungsbedingungen verlangsamen.
Die Bestandsgröße nähert sich einem ***Sättigungswert S***.
Diese realistische Zunahme eines Bestandes wird als ***logistisches Wachstum*** bezeichnet.

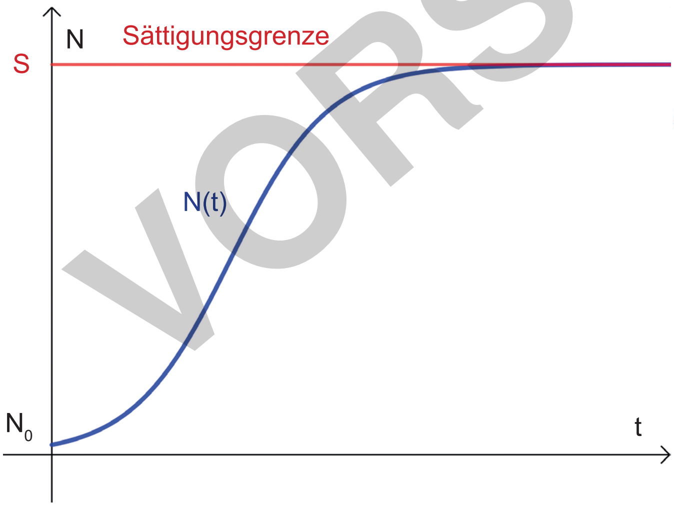
Während bei rein exponentiellen Prozessen die Wachstumsgeschwindigkeit (momentane Änderungsrate) proportional zum aktuellen Bestand N(t) ist, verhält sich die Wachstumsgeschwindigkeit bei logistischem Wachstum proportional zum Produkt aus aktuellem Bestand N(t) und aktuellem Sättigungsdefizit (S – N(t)). Dabei wird vorausgesetzt, dass gilt: N(t) < S und folglich (S – N(t)) > 0. Der Faktor (S – N(t)) dämpft die Wachstumsgeschwindigkeit im zeitlichen Verlauf.

$N'(t) = k \cdot N(t)$	$\Rightarrow$	$N'(t) = k \cdot N(t) \cdot (S - N(t))$
exponentielle Wachstumsgleichung		**logistische Wachstumsgleichung**

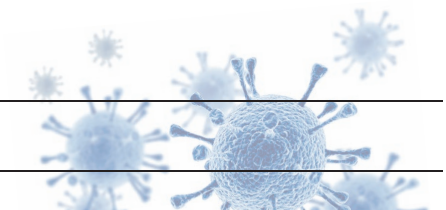
Die hier nachfolgende, ohne Herleitung angegebene Lösung der logistischen Wachstumsgleichung – einer Differentialgleichung – ist die die ***logistische Wachstumsfunktion***.

$$\boxed{N(t) = \frac{N_0 \cdot S}{N_0 + (S - N_0) \cdot e^{-S \cdot k \cdot t}}}$$

$N_0 = N(0)$ = Anfangsbestand, $N_0 > 0$



EA **Aufgabe 1**: *Begründe, dass sich die Ausbreitung der Infektionen mit dem Corona-Virus im gesamten Verlauf der Pandemie nicht durch eine Exponentialfunktion beschreiben lässt, sondern dass die Modellierung durch eine logistische Funktion realistischer ist.*



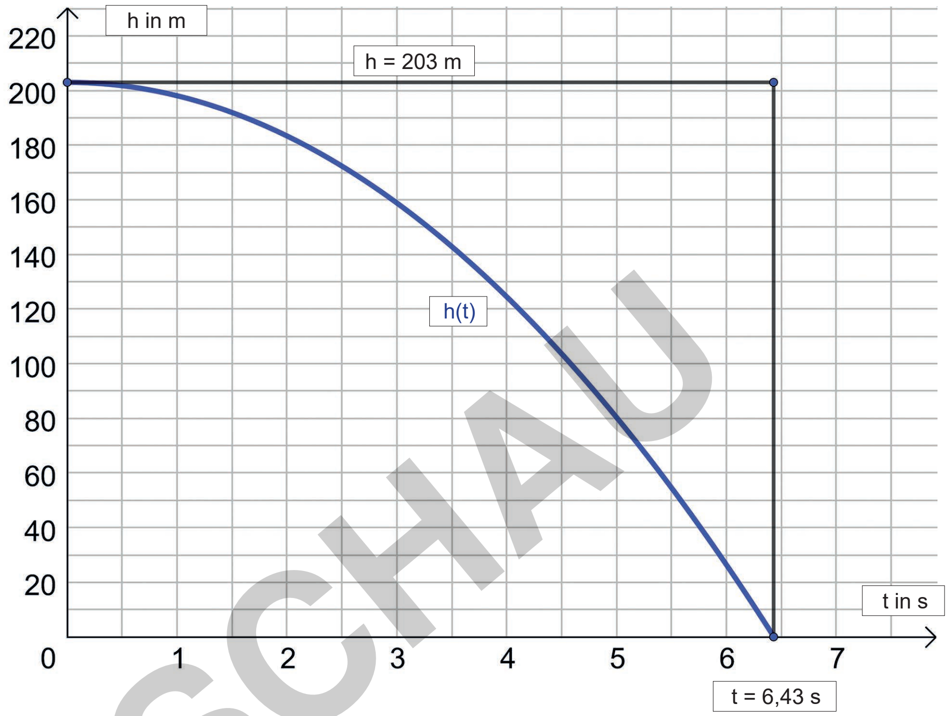
Lösungen

5 5.3 Übungsaufgaben (Blatt 4, Blatt 5 und Blatt 6)

Aufgabe 4: **i)** $h(t) = 203\text{ m} - \frac{g}{2} \cdot t^2$

j)

Zeit t in s	0	1	2	3	4	5	6	6,43	6,44
Höhe h in m	203	198,09	183,38	158,85	124,52	80,37	26,42	0,20	– 0,43



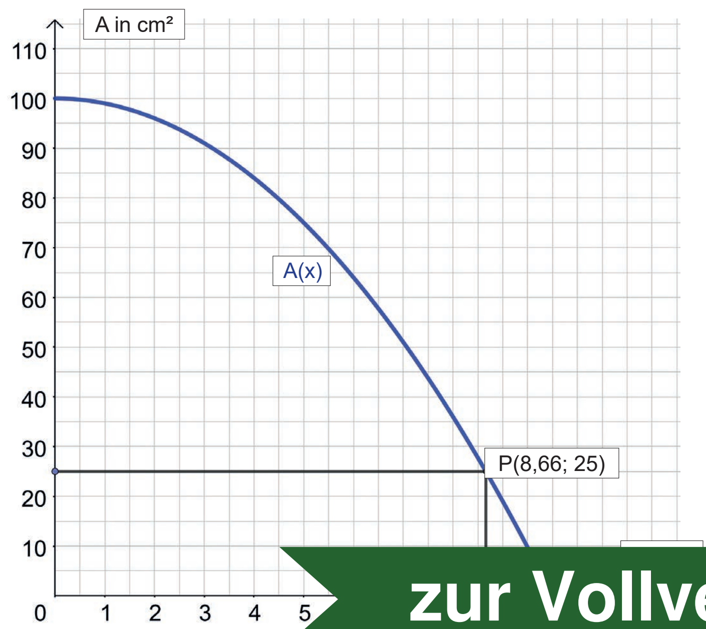
5.3 Übungsaufgaben (Blatt 7)

Aufgabe 5: **a)**

Einschnitt x in cm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Restfläche A in cm²	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19	0

b) A(x): Restfläche in cm² nach Abtrennen der quadratischen Flächen
x: Länge des Einschnittes in cm Wachstumsfunktion: $A(x) = 100\text{ cm}^2 - x^2$
$D = \{ x \mid 0\text{ cm} \leq x \leq 10\text{ cm}, x \in N \}$

c) Graph



Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG