Höher, schneller, weiter(denken)

Wettbewerbsmotivation – auch im Unterricht?

Wettbewerbe können motivieren, auch im Mathematikunterricht. Aufgaben aus Wettbewerben bieten gute Lernsituationen zum Problemlösen. Der Vergleich kann Fähigkeiten der Selbstregulation stärken.

REGINA BRUDER, LUKAS DONNER, BENJAMIN ROTT

Auch ohne einen organisierten Rahmen suchen Kinder und Jugendliche schon früh den Vergleich mit anderen (vgl. Heckhausen/Roelofsen 1962). *Wer hat die tollsten Geburtstagsgeschenke bekommen? Wer ist größer? Wer hat die meisten Follower, die meisten Likes? Wer kann schneller laufen? Wer traut sich, höher zu klettern? Wer gewinnt beim Schach?* Die Liste ließe sich beliebig fortführen. Durch das Vergleichen mit anderen findet ein Erkennen individueller Unterschiede und damit auch der eigenen Stärken und Präferenzen statt und damit ein Sich-Einordnen in der Gesellschaft. Dies kann – gut dosiert und wertschätzend für alle gestaltet – auch im Mathematikunterricht genutzt werden. Viele Wettbewerbe bieten Aufgaben-Archive (mit Lösungen) an. Die (mathematischen) Rätsel können manche Schüler:innen motivieren, sich mit ihnen sowohl im Unterricht als auch in ihrer Freizeit zu beschäftigen – einzig und allein aus Freude und Spaß, solche Rätsel zu lösen. Die Faszination an mathematischem Rätseln als Freizeitaktivität zeigt sich auch an wiederkehrenden Trends wie der Freude am Lösen von Sudokus und Logik-Rätseln sowie des Zauberwürfels. Will man hierbei immer besser werden (also schnellere Lösungen finden oder schwierigere Rätsel knacken), dann haben auch diese Beschäftigungen – auch wenn man ganz alleine rätselt – einen Wettbewerbscharakter.

Lernpotenzial in Wettbewerbssituationen

Egal, in welcher Disziplin: Wer an einem Wettbewerb teilnimmt und sich darauf vorbereitet, wendet sich engagiert und ausdauernd (oft kreativ) einer bestimmten Sache zu. Stets geht es darum, sich unter bestimmten Regeln miteinander zu messen.

Das Potenzial eines Mathematikwettbewerbs besteht in der intrinsisch motivierten Beschäftigung mit mathematischen Rätseln und der für eine erfolgreiche Wettbewerbsteilnahme meist auch notwendigen Vorbereitung. Die beim (schrittweise erfolgreichen) Rätseln erlebte Genugtuung, ein Ziel erreicht zu haben, kann das „Dranbleiben" in vergleichbaren Situationen und damit wichtige Selbstregulationsfähigkeiten fördern. Ein Wettbewerb kann dabei (analog zum Sport) als Abschluss eines längeren Prozesses gesehen werden. Wettbewerbe in Mathematik und Sport haben darüber hinaus vieles gemeinsam: das olympische Motto, unterschiedliche Zielgruppen sowie die Vielfältigkeit der Formate, die vom „mathematischen Sprint" bis zum „Marathon" reichen.

Was macht etablierte Wettbewerbe aus?

Ein Ziel, das alle etablierten Mathematikwettbewerben teilen, ist die *Beschäftigung mit mathematischen Inhalten,* unabhängig von der schulischen Situation. Dies ist ein bedeutsamer Aspekt, da interessegeleitetes Lernen erfolgreicher ist als eine rein extrinsische Motivation mit gegebenenfalls emotional als belastend empfundenem Bewertungsdruck.

Etablierte Wettbewerbe können im Unterricht und außerhalb des „Schulalltags" zur mathematischen Tätigkeit beitragen. Die Inhalte und Schwierigkeitsgrade hängen vom jeweiligen Wettbewerb, dessen Format und von der Zielgruppe ab. Jedenfalls soll die Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Rätseln und problemhaften Aufgaben bei Lernenden geweckt bzw. verstärkt werden. Beispielsweise werden Aufgaben wie in **Kasten 1** zum Falten aus Sicht der Schüler:innen der Schulstufen 5 bis 8 als besonders reizvoll und schön empfunden (Brinkmann 2009).

Generell zeigen viele Aufgaben des Känguruwettbewerbs, dass sogar leicht verständliche Aufgaben, für die kaum curriculares Wissen benötigt wird, bei Lernenden zu verblüffenden Einsichten führen können. Umgekehrt können Aufgaben aus etablierten Wettbewerbsformaten wie dem Känguru-Wettbewerb auch den Unterricht selbst bereichern (vgl. Donner/Unger 2022).

Wettbewerbe können eine Plattform bieten, um das Interesse einiger Schüler:innen zu erhöhen, wenn als Vor- oder Nachbereitung eines

Wettbewerbs über die überraschenden und spannenden Inhalte nachgedacht und miteinander diskutiert wird. Basierend auf überregionalen Wettbewerben wie der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) haben sich zahlreiche mathematische Strukturen außerhalb des Wettbewerbs etabliert, die in ihrer ursprünglichen Form der Vorbereitung auf Wettbewerbe ausgerichtet sind: regelmäßige Förderangebote wie Mathe-AGs, „Korrespondenzzirkel“, Vorbereitungswochenenden, Mathe-Camps, Aufgabenpublikationen in Magazinen oder auf Internetseiten und Foren. Eine Übersicht über etablierte Wettbewerbsformate findet sich in **Material 1**.

Talente erkennen, Begabung fördern

Wettbewerbe können Jugendliche mit einer Sache in Berührung bringen und Talente aufzeigen, die im Schulalltag evtl. nicht auffallen. Gerade in der Mathematik ist es einigen Schüler:innen nicht bewusst, welches mathematische Potenzial in ihnen schlummert, das bei Interesse systematisch gefördert werden könnte. Talentierte (junge) Menschen abseits vom Regelunterricht durch anspruchsvolle Fragen mit Mathematik in Kontakt zu bringen, ist erklärtes Ziel einiger Wettbewerbe wie der *Mathematik-Olympiade* oder dem *Bundeswettbewerb der Mathematik*. Zugleich bieten Wettbewerbe eine Plattform, um Gleichgesinnte zu treffen, sich zu vernetzen und (evtl. sogar langfristige) Kontakte aufzubauen.

Anregung für alle: quick thinker und deep thinker

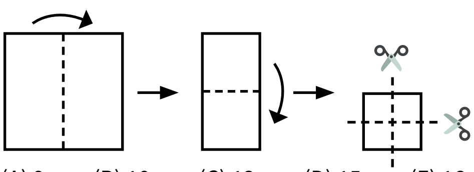
Die Idee, mathematische Kreativität und Begabung auch durch prestigeträchtige Wettbewerbe zu fördern, inklusive eines dazu begleitenden Angebots außerschulischer Aktivitäten, wird mittlerweile in vielen (Bundes-)Ländern durchgeführt, denn ohne spezielle Vorbereitung ist etwa eine Teilnahme an der *Internationalen Mathematik Olympiade* (IMO) sinnlos. Erhalt, Bestätigung und Förderung mathematischer Interessen und Begabungen können also Ziel mathematischer Wettbewerbe sein. Wobei hier differenziert werden muss: Unter den Begabten gibt es bezüglich des Zugangs zu mathematischen Problemen zwei grundsätzlich konträre Gruppen (s. Koichu/Andžāns 2009): Einige gehören der Gruppe der *quick thinker* (schnell Denkende) an, die sich leicht und schnell in verschiedene Aufgaben hineindenken können, den Kern der Aufgabe erfassen und damit oft erfolgreich bei Wettbewerben unter Zeitdruck abschneiden. Auf der anderen Seite gibt es *deep thinker* (tiefgründig Denkende), die lieber intensiv und lange über einzelne Aufgaben nachdenken und dabei tiefe Erkenntnisse gewinnen, die oft weit über die eigentliche Lösung des Problems hinausgehen. Unter den Personen, die die Fields-Medaillen gewonnen haben, sind beide Gruppen vertreten.

Abb.: Training für ein gestecktes Ziel bzw. Wettbewerbe können auch in der Mathematik anregend und motivierend sein.

1 WISSENSWERT

Falten und Schneiden

Constantin faltet ein quadratisches Stück Papier zweimal. Dann schneidet er es zweimal wie in der Abbildung. Wie viele Papierstücke erhält er?



(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 16

Quelle: Känguru der Mathematik 2019, Klasse 5 und 6

Lösung: Entgegen der vorschnellen Antwort 16 erhält Constantin bloß 9 Teile (ein großes Quadrat, 4 Rechtecke sowie 4 kleine Quadrate). Setzt man diese Aufgabe im Unterricht ein, sollte diese von Schüler:innen zunächst ohne Hilfsmittel bearbeitet werden, um anschließend gegebenenfalls die gefundenen Lösungen experimentell durch Basteln zu überprüfen.

Stefan Schurr/Stock.adobe.com

…e-	Jugend forscht/ Schüler:innen experimentieren https://fr-vlg.de/w1	Bundeswettbewerb Mathematik https://fr-vlg.de/w2	Mathematik Olympiade/Grundschule https://fr-vlg.de/w3	Känguru der Mathematik https://fr-vlg.de/w4	Pangea-Wettbewerb https://fr-vlg.de/w5	Bolyai-Wettbewerb https://fr-vlg.de/w6	Mathe im Advent https://fr-vlg.de/w7	Mathematik ohne Grenzen https://fr-vlg.de/w8	Náboj-Wettbewerb https://fr-vlg.de/w9
TN (2019)	897 (511 M/368 Info)	1100	200 000	968 000	137 000	12 000	130 000	54 147	380 (76 Teams)
Klasse	15 – 21 J./4.Klasse – 14.J.	9. – 13. Klasse	3. – 13. Klasse	3. – 13. Klasse	3. – 10. Klasse	3. – 10. Klasse	3. – 13. Klasse	10. – 11.(G13) 9. – 10. (G12)	8. – 13. Klasse
Einzel/ Team	Team bis zu 3 TN (auch jahrgangsübergreifend)	1. Runde: Team bis zu 3 2./3. Runde: Einzel	Einzel (Ausnahme: Bundesrunde und 1. Runde GS)	Einzel	Einzel	Team (2 – 4 TN mehrer Jahrgänge)	Einzel und Klasse	ganze Klassen/Kurse	Team
Für wen?	gehobene Breite	Spitze	Breite und Spitze	Breite	Breite	Breite	Breite	Breite	Breite
	deep thinker	deep & quick	deep	quick	quick	quick	deep	quick	quick
Art der Aufgaben	schriftliche Ausarbeitung und Präsentation	1./2. Runde: Hausaufgabe; 3. Runde: Kolloquium	1. Runde: Hausaufgabe 2.-4. Runde: Klausur	Multiple-Choice (1 aus 5)	1./2. Runde: Multiple-Choice (1 aus 5) 3. Runde: Klausur	Multiple-Choice (1 aus 5) und 1 Freitextaufgabe	Multiple-Choice (1 aus 5)	1	Ergebnisse sind eine oder mehrere Zahlenwerte
Ort des Wettbewerbs	extern	1./2. R.: zuhause 3. Runde: zentral	Zuhause und zentral	Schule	1./2. Runde: Schule, 3. Runde: zentral	Schule Finale in Budapest	zuhause oder Schule	Schule	extern
Was wird bewertet	Ausarbeitung, Präsentation und Projekt selbst	Lösung und Lösungsweg	Lösung und Lösungsweg	Punkte nach Schwierigkeit	Lösung. 3. Runde: Lösung und Lösungsweg	Punkte für richtige Antwort. Freitextfrage: Nähe zur Lösung	Punkte pro richtiger Antwort	Richtigkeit, Vollständigkeit, Darstellung, Begründung	Resultat falsch/richtig; falls richtig: eine neue (schwierigere) Aufgabe; anfangs 6 Aufgaben
…el- …n …n- …e	individuelles Feedback in jeder Runde	ausführliche Musterlösungen online	Lösungen online	Lösungsheft	Lösungen online	Lernende können ihre Antworten und Lösungen einsehen	Punkt pro richtiger Antwort	Musterlösungen, Besprechung durch die Lehrkräfte i. U.	Broschüre mit Beispiellösungen; Ergebnisse, Statistiken, Lösungen online
…nd …r-	Mentorenschaft für die Projekte, Anmeldung	Austeilen der Aufgaben, Erinnern an Fristen	Korrekturen der 1. & 2. Runde	Organisation, Online-Eingabe	Organisation Online-Eingabe	Organisation, Korrektur, Online-Eingabe	Anmelden der Klasse	Korrektur des Probewettbewerbs	Anmeldung der Teams
…n	kostenlos (ggf. Kostenübernahme für Material)	kostenlos	kostenlos	2€	kostenlos	3€	Klassenwettbewerb: 15€ bzw. 35€	---	kostenlos

Material 1

LUKAS DONNER, ALEXANDER UNGER

Mathematische Werkzeuge originell einsetzen

Aufgaben des Känguru-Wettbewerbs in der Schule

LERNGRUPPE: 3.–13. Schuljahr

IDEE: erlernte mathematische Konzepte flexibel einsetzen, mathematisches Denken schulen

MATERIAL: alle Aufgaben vergangener Känguru-Wettbewerbe auf der Webseite des Wettbewerbs: https://www.mathe-kaenguru.de

ZEITBEDARF: unterrichtsbegleitend

Der Känguru-Wettbewerb begeistert Jahr für Jahr Millionen Kinder und Jugendliche in mittlerweile fast 100 Ländern. In Deutschland wird er ab dem 3. Schuljahr angeboten. In den Klassenstufen 3 und 4, 5 und 6 usw. werden jeweils dieselben Aufgaben gestellt. Es gibt jeweils drei Schwierigkeitsstufen: leicht, mittelschwer und schwer.

Was macht den Reiz dieser Aufgaben aus? Liegen selbst anspruchsvolle Wettbewerbsaufgaben nah am Unterricht und können für diesen als Bereicherung genutzt werden? Wie könnte das konkret geschehen?

Schulbuchaufgabe vs. Wettbewerbsaufgabe

Aufgaben erfüllen im Mathematikunterricht spezifische Funktionen und dienen damit einem bestimmten Zweck: der Erkundung, dem Entdecken, der Begriffsbildung, dem Sichern und Systematisieren oder dem Üben und Wiederholen (Bruder u. a. 2005). Oft dient das Lösen von Aufgaben also dazu, gelernte Inhalte auf standardisierte Art und Weise in einem mehr oder weniger bekannten Kontext anzuwenden, um zu üben.

Bei Aufgaben des Känguru-Wettbewerbs werden grundlegend dieselben mathematischen Inhalte thematisiert, die in den Curricula verankert sind und den Kern der üblichen Schulbuchaufgaben bilden. Jedoch unterscheidet sich der Blickwinkel auf die Gegenstände wesentlich: Zu einem gewissen Grad sind originelle Gedanken nötig, um eine Lösung zu finden. Im Prozess des Lösens werden erlernte Konzepte vertieft und kommen flexibel zum Einsatz. Oft können oder müssen nicht offensichtliche Zusammenhänge erkannt und genutzt werden. Der Zweck der Wettbewerbsaufgabe ist häufig allein darin begründet, durch das Lösen Neues zu entdecken. Somit stellt eine wesentliche Eigenschaft ein gewisses Maß an Rätselhaftigkeit dar (vgl. Geretschläger/Donner 2022).

Diese spezielle Sichtweise auf mathematische Inhalte wird im Folgenden anhand zweier Wettbewerbsaufgaben exemplarisch dargelegt, indem wir diese mit thematisch passenden Schulbuchaufgaben vergleichen. Anschließend folgen allgemeine Anregungen zum Einsatz von Känguru-Aufgaben in der Schule.

Eine spezielle Sicht auf quadratische Funktionen

Als erstes Beispiel betrachten wir die (Wettbewerbs-)Aufgabe A in **Abb. 1** und im Vergleich dazu Aufgabe B in **Abb. 2,** eine typische Schulbuchaufgabe gegen Ende der Sekundarstufe I.

Aufgabe A
In der Abbildung ist ein Teil des Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu sehen. Welche der folgenden Zahlen ist positiv?

(A) c (B) $b + c$
(C) ac (D) bc (E) ab

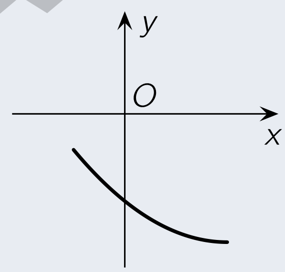


Abb. 1: Känguru der Mathematik 2020, Klassen 11–13, höchste Schwierigkeit

Aufgabe B
Gegeben sind drei Parabeln im Koordinatensystem. Wähle geeignete Punkte aus und bestimme jeweils die zugehörige Funktionsgleichung.

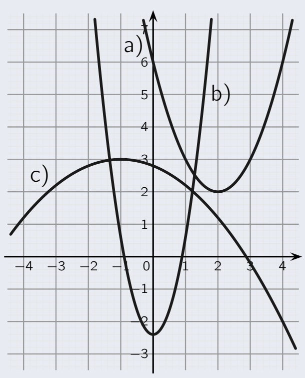
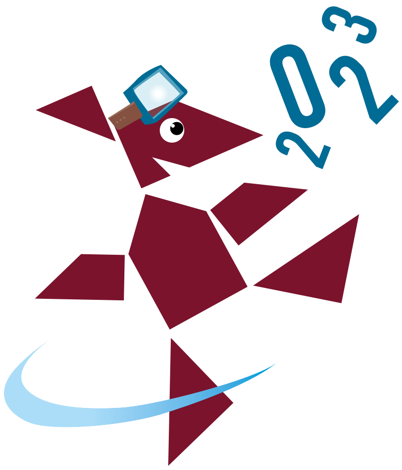


Abb. 2: Typische Schulbuchaufgabe zu quadratischen Funktionen



Der Känguru-Wettbewerb 2023 findet am 16. März 2023 statt.
Online-Anmeldung: ab 1.1.2023
Anmeldeschluss: 10.02.2023

Weitere Informationen:
https://www.mathe-kaenguru.de/

Hier geht's zum Aufgabenarchiv:
https://www.mathe-kaenguru.de/chronik/aufgaben

Wir wenden uns zunächst Aufgabe B zu. Je nach Vorwissen wählen Schüler:innen – so wie im Text vorgegeben – geeignete Punkte auf dem Graphen aus, wie z. B. die Schnittpunkte mit den Achsen, den Scheitelpunkt oder Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, und schließen damit auf die – eindeutig bestimmte – Funktionsgleichung. Ob die Lernenden die Normalform oder die Scheitelpunktform angeben sollen, ist nicht spezifiziert.

Im Gegensatz dazu ist bei Aufgabe A zwar die Kenntnis des typischen Verlaufs des Graphen einer quadratischen Funktion vonnöten, jedoch kann die Funktionsgleichung nicht direkt abgelesen bzw. berechnet werden. Dies ist aber auch gar nicht nötig! Offenbar genügt es, Aussagen über das Vorzeichen der Koeffizienten zu treffen. Und das scheint möglich, obwohl trotz fehlender Skalierung die exakte Lage des Graphen der Funktion unbekannt ist. Diese Struktur einer (scheinbar unterbestimmten) Aufgabe ist für Lernende in der Regel unerwartet, und genau dies macht die Aufgabe zu einem Rätsel. Die Lösung dieses Rätsels erfordert im Gegensatz zur Schulbuchaufgabe eine originelle Idee.

Wir stellen zuerst zwei Lösungswege vor, die sich in der Wettbewerbssituation – also insbesondere ohne technische Hilfsmittel – anbieten. Anschließend präsentieren wir zwei weitere denkbare Lösungswege, wie diese Aufgabe darüber hinaus unter Verwendung technischer Hilfsmittel im Unterricht aufgegriffen werden könnte. Dabei machen wir uns die Charakteristik des Multiple-Choice-Wettbewerbs zunutze (was vorab mit den Schüler:innen thematisiert werden sollte): Da jede Parabel mit diesem Verlauf zur selben Antwort führen muss, genügt es, *eine* mögliche Funktionsgleichung mit passendem Funktionsgraphen zu finden und die fünf Terme der Antwortoptionen zu berechnen. Die Lernenden können demnach heuristisch vorgehen und ein Beispiel, das die Bedingungen erfüllt, durch (systematisches) Probieren finden. Auch das Miteinbeziehen der Antwortmöglichkeiten beim Lösen ist eine vorteilhafte Strategie für viele der Aufgaben des Känguru-Wettbewerbs.

Lösungsweg „Scheitelpunkt"
Zunächst können für die Koeffizienten a und c zwei charakteristische Merkmale des Funktionsgraphen aus der Skizze genutzt werden:

- Die Parabel ist offenbar nach oben geöffnet, also gilt $a > 0$.
- Der y-Achsenabschnitt ist negativ, also gilt $c < 0$.

So lassen sich die Antwortmöglichkeiten (A) und (C) ausschließen. Um die Aufgabe zu lösen, benötigen wir noch eine Aussage über das Vorzeichen des Koeffizienten b. Gilt $b < 0$, ist (E) die Lösung, gilt $b > 0$, ist (D) die Lösung, und für $b = 0$ käme keine der Antwortmöglichkeiten in Frage, das kann also gar nicht sein.

Die Parabel ist gegenüber der zur Funktion g mit $g(x) = ax^2$ gehörigen Parabel nach unten und rechts verschoben. Dadurch, dass die Parabel rechts vom dargestellten Abschnitt (irgendwann) wieder nach oben verläuft, wissen wir, dass der Scheitelpunkt $S(x_s \mid y_s)$ rechts des sichtbaren Abschnitts des Graphen liegt und somit $x_s > 0$ gilt. Mit $0 < x_s = -\frac{b}{2a}$ und $a > 0$ folgt daher $b < 0$, also ist (E) die Lösung.

Im Rahmen der Erarbeitung dieses Lösungsweges bietet sich ein Unterrichtsgespräch über den algebraischen Zusammenhang zwischen Normalform und Scheitelpunktform quadratischer Funktionen an.

Lösungsweg „Ableitung"
Wie oben finden wir $a > 0$ und $c < 0$. Für die Ableitung der Funktion f an der Stelle 0 gilt $f'(0) = b$. Dies entspricht dem Anstieg der Parabel im Schnittpunkt mit der y-Achse. Da die Parabel in diesem Punkt fällt ist, die Steigung der Tangente an diesem Punkt negativ, es gilt also $b < 0$.

Die Art des Arguments, mithilfe der Steigung in einem Punkt Aussagen über das Vorzeichen eines Koeffizienten zu treffen, ist zwar ungewöhnlich. Das Ablesen der Steigung bzw. das Einzeichnen der Tangente an speziellen Punkten eines Graphen sind jedoch vertraute Tätigkeiten für Schüler:innen im Rahmen der Differenzialrechnung und können in diesem Fall in einer überraschenden Situation zum Einsatz kommen.

Grafik: Friedrich Verlag