# Vorwort

**Fest integriert – Einleitung**

Brüche und Dezimalzahlen sind feste Bestandteile unserer Umgangssprache. Beispielsweise werden in zahlreichen Kochrezepten Zutatenmengen als Brüche oder Dezimalzahlen anstatt in Gramm oder Milliliter angegeben. Man denke in diesem Zusammenhang an die abgeriebene Schale einer halben Zitrone, die einem Gericht zugefügt wird, oder die 0,125 l Milch, die des Öfteren zum Backen eines Kuchens erforderlich sind. In einer Gaststätte bestellen wir manchmal einen Schoppen Wein, bei dem es sich – regional unterschiedlich – zumeist um einen viertel bis halben Liter handelt. Wir sprechen auch des Öfteren von der nördlichen beziehungsweise südlichen Erdhalbkugel, bei der es sich rein mathematisch betrachtet um nichts weiter als einen Bruch handelt.

Viele Erwachsene können sich die Mengen weitgehend vorstellen, die durch diese Bruch- und Dezimalzahlen ausgedrückt werden. Bei Kindern und Jugendlichen sieht das häufig etwas anders aus. Sie nutzen in ihrem täglichen Sprachgebrauch zwar auch Begriffe wie eine Fünftel-Pizza, können aber oft nicht abstrahieren, wie groß ein solches Stück ist. Um das Abstraktionsvermögen von Schülern stärker zu entwickeln, wurden in diesem Buch zahlreiche Brüche und Dezimalzahlen in Form von Abbildungen und Fotos dargestellt. Auf diese Weise lässt sich das Komplizierte (Abstrakte) extrem vereinfachen, wodurch man den Schülern einen leichteren Einstieg in die Thematik des Rechnens mit Brüchen und Dezimalzahlen bietet.

Das vorliegende Buch erweist sich aber nicht nur als Unterstützung für den Matheunterricht, sondern auch als Leitfaden für Eltern, die ihren Kindern beim Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen Hilfestellungen geben möchten. Darüber hinaus eignet es sich auch für Erwachsene, die die Rechenoperationen mit Brüchen sowie Dezimalzahlen zeitsparend und effektiv rekapitulieren möchten.

Viel Freude und Erfolg beim Einsatz der vielfältigen angebotenen Unterrichtsmaterialien wünscht ihnen das Team des Kohl-Verlags.

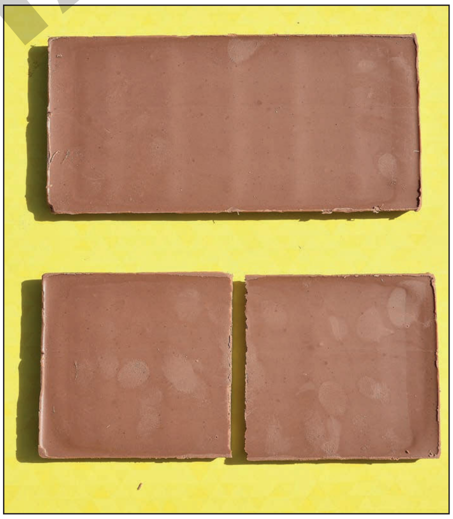
# Der Begriff „Bruch“

Du hast vielleicht schon gehört, dass es in der Mathematik den Themenkomplex der Bruchrechnung gibt. Bei dem Begriff Bruchrechnung handelt es sich um ein zusammengesetztes Wort aus „Bruch“ und „Rechnung“. Was Rechnen ist, weißt du bereits. Aber was genau ist ein Bruch? Rein grammatikalisch ist dieses Wort ein Substantiv. Das dazu gehörende Verb lautet „brechen“ beziehungsweise „abbrechen“ oder „zerbrechen“. Bei der Bruchrechnung wird nun aber nicht einfach irgendwie zerbrochen, sondern immer in mehrere genau gleich große Teile geteilt bzw. dividiert.

Die Rechenoperation Division ist also der eigentlich zentrale Begriff bei der Bruchrechnung. Du kennst ja schon den schönen einfachen Fall einer Division, die ohne einen Rest **ganz** aufgeht.

Wenn nun eine Division nicht aufgeht, hat man zwei Möglichkeiten. Einmal kann man die Rechnung fortführen und bekommt dann ein „krummes Ergebnis“, präziser, eine Dezimalzahl. Diesen Fall behandeln wir später in diesem Buch. Man kann aber auch „aus der Not eine Tugend machen“ und immer dann, wenn kein ganzes Ergebnis herauskommt, die Rechenoperation gar nicht erst ausführen, sondern eben „einen Bruch daraus machen“. Diesen Weg beschreiten wir hier im ersten Teil des Buches, wir führen im Grunde eine **neue Zahlenart, die Brüche**, ein.

Stelle dir einmal eine Tafel Schokolade vor. Mathematisch gesehen handelt es sich bei dieser Tafel um **ein Ganzes**. Deshalb kann man, mathematisch ausgedrückt, dafür auch die **Zahl 1** schreiben.



Wenn du diese Tafel in zwei gleich große Teile zerbrichst, erhältst du zwei Hälften. Jedes dieser beiden gleich großen Teile ist also eine halbe Tafel. Man kann auch sagen, dass es sich bei jedem dieser Teile um **ein Halbes** des Ganzen handelt. Fügst du die beiden Hälften zusammen, erhältst du wieder ein Ganzes (beziehungsweise eine ganze Tafel). Wenn du das Zerteilen der Schokolade in zwei Hälften als **Rechenoperation** ausdrücken möchtest, ist das **1 : 2**.

Selbstverständlich könntest du die Schokolade auch in drei gleich große Stücke zerbrechen. Jedes dieser Bruchstücke wäre dann der dritte Teil der ganzen Schokoladentafel. Als Bruch ausgedrückt, bezeichnet man jedes dieser drei gleich großen Teile als **ein Drittel**. Möchtest du das Zerteilen der Schokolade in Drittel als Rechenoperation ausdrücken, ist das **1 : 3**.



KEINE ANGST MEHR VOR BRÜCHEN
Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen verständlich erklärt und anschaulich dargestellt – Bestell-Nr. P12 924
KOHL VERLAG

# Der Aufbau eines Bruches

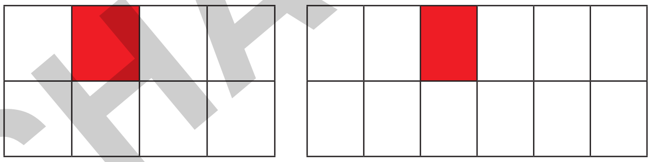
Bei der Bruchrechnung wird anstatt des Divisionszeichens ein kleiner Querstrich gesetzt, über sowie unter dem die jeweiligen Zahlen angeordnet sind. Für ein Drittel wird somit aus der Operationsschreibweise **1 : 3** die Darstellung als Bruch: $\frac{1}{3}$

Die drei Bestandteile eines Bruches werden wie folgt bezeichnet:
**Über dem Bruchstrich** steht der **Zähler**. Dann kommt der waagerechte **Bruchstrich**, welcher die beiden Zahlen voneinander trennt. **Unter dem Bruchstrich** befindet sich der **Nenner**.
Ausgesprochen wird ein Bruch, indem man zuerst den Zähler sagt. Anschließend sagt man den Nenner, an den die Silbe **-tel** beziehungsweise **-stel** angehängt wird.

Beispiele: $\frac{3}{5}$ ➔ drei Fünf**tel** und $\frac{7}{20}$ ➔ sieben Zwanzig**stel**.

Ausnahmen gibt es nur, wenn die Zahlen 1, 2 oder 3 im Nenner stehen. Dann spricht man von **Ganzen, Halben und Dritteln**.

Beispiele: $\frac{3}{1}$ ➔ drei Ganze, $\frac{5}{2}$ ➔ fünf Halbe und $\frac{2}{3}$ ➔ zwei Drittel.



**Aufgabe 1**: *Stelle dir vor, du zerbrichst …*
a) *eine Schokoladentafel in 8 und*
b) *eine andere in 12 gleich große Teile.*
*Wie würde man jedes dieser Teile, als Bruch ausgedrückt, bezeichnen?*

Tipp: Schau dir noch einmal an, wie man jedes Teil nannte, als die Schokolade in 3 gleich große Stücke zerbrochen wurde.

a) ______________________________

b) ______________________________

**Aufgabe 2**: *Wie werden folgende Brüche ausgesprochen? …*

a) $\frac{7}{8}$ ➔ ______________________________

b) $\frac{22}{23}$ ➔ ______________________________

c) $\frac{11}{100}$ ➔ ______________________________

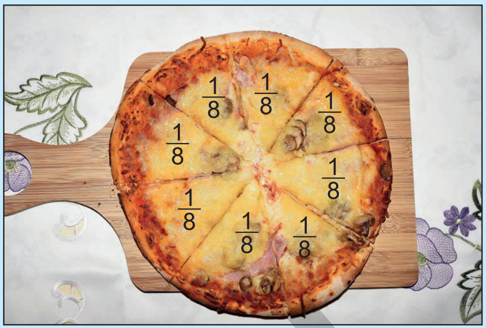
d) $\frac{4}{2}$ ➔ ______________________________

Betrachtet man eine Tafel Schokolade von oben, hat sie die Figur eines Rechtecks. Man kann aber nicht nur Rechtecke in mehrere Teile zerlegen, sondern auch alle anderen Gegenstände, Flüssigkeiten und Gase.

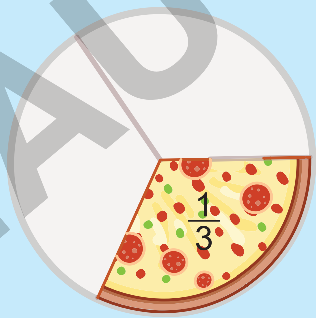
**Aufgabe 3**: *Beispielsweise lässt sich ein Baumstamm in 5 gleich große Stücke zersägen. Wie würde man ein einzelnes Stück des zersägten Baumstamms als Bruch bezeichnen?*

# Der Aufbau eines Bruches

Betrachtet man eine Pizza von oben, stellt diese einen Kreis dar. Um die Pizza besser essen zu können, wird diese zumeist in handliche Stücke geschnitten. So kann man sie beispielsweise, ähnlich wie die Schokolade, in 8 gleich große Stücke teilen.

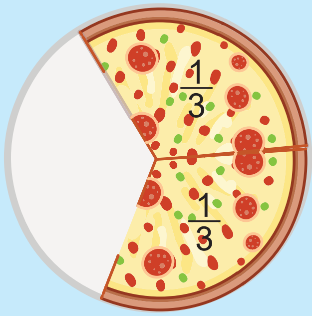




Selbstverständlich könntest du die Pizza auch in 3 gleich große Stücke zerteilen. Jedes einzelne dieser Stücke wäre dann in diesem Fall **ein Drittel**, geschrieben $\frac{1}{3}$, vom Ganzen. Der angemalte Teil stellt genau ein Drittel von unserer Pizza dar.

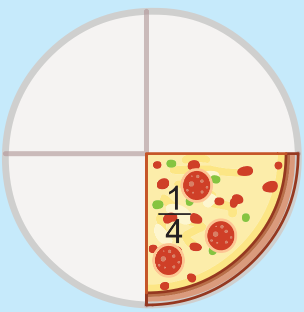



Die 3 unter dem Bruchstrich drückt also aus, **in wie viele** gleich große Stücke die Pizza zerteilt wurde. Die 1 über dem Bruchstrich sagt aus, dass von diesen 3 Teilen nur 1 vorhanden ist.

Stell dir einmal vor, du nimmst ein $\frac{1}{3}$ großes Stück von einer ganzen Pizza weg. Dann bleibt ein Rest von $\frac{2}{3}$ übrig, gesprochen **zwei Drittel**.




Die 2 über dem Bruchstrich sagt aus, dass von den insgesamt 3 Teilen, die unter dem Bruchstrich genannt werden, nur noch genau 2 vorhanden sind.




Natürlich kannst du eine Pizza auch in 4 gleich große Stücke zerschneiden. Jedes einzelne dieser 4 Stücke wäre dann **ein Viertel**, als Bruch geschrieben $\frac{1}{4}$. Die 4 im Nenner besagt, dass insgesamt 4 Stücke vorhanden sind.

Stell dir vor, du nimmst ein Viertel von einer ganzen Pizza weg. Zähle nun die Viertel, die übrig sind. Richtig, es bleiben 3 übrig. Wenn du diese **drei Viertel** als Bruch aufschreibst, steht die 3 über dem Bruchstrich und die 4 darunter, also so: $\frac{3}{4}$



KEINE ANGST MEHR VOR BRÜCHEN
Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen verständlich erklärt und anschaulich dargestellt – Bestell-Nr. P12 924
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

# Brüche erweitern – Hauptnenner

**Aufgabe 2:** *Führe den Punkt 6.) von der letzten Seite für die anderen Zeilen der Tabelle durch und erweitere die dort genannten restlichen sechs Brüche entsprechend auf den Hauptnenner.*

**a)** Faktor zu 7 ➔ ________________________ ➔ $\frac{4}{7}$ = ____________

**b)** Faktor zu 21 ➔ ________________________ ➔ $\frac{2}{21}$ = ____________

**c)** Faktor zu 15 ➔ ________________________ ➔ $\frac{3}{15}$ = ____________

**d)** Faktor zu 4 ➔ ________________________ ➔ $\frac{6}{4}$ = ____________

**e)** Faktor zu 3 ➔ ________________________ ➔ $\frac{2}{3}$ = ____________

**f)** Faktor zu 12 ➔ ________________________ ➔ $\frac{1}{12}$ = ____________

**Aufgabe 3:** *Ermittle für die (unten rechts stehenden) Brüche den Hauptnenner. Wende dabei die Primzahlenzerlegung an. Nachdem der Hauptnenner gefunden ist, berechne die Faktoren zum Erweitern der Brüche und erweitere diese.*

| Nenner | 2 | 3 | Faktor |
|---|---|---|---|
| 16 | | | |
| 9 | | | |
| 8 | | | |
| 12 | | | |
| HN | | | |

**a)** Zerlegung von 16 = ____________________

Faktor zu 16 ➔ ____________________ ➔ $\frac{3}{16}$ = ____________________

**b)** Zerlegung von 9 = ____________________

Faktor zu 9 ➔ ____________________ ➔ $\frac{4}{9}$ = ____________________

**c)** Zerlegung von 8 = ____________________

Faktor zu 8 ➔ ____________________ ➔ $\frac{5}{8}$ = ____________________

**d)** Zerlegung von 12 = ____________________

Faktor zu 12 ➔ ____________________ ➔ $\frac{1}{12}$ = ____________________

HN = ____________________

**Aufgabe 4:** **a)** *Schau dir einmal die Tabellen auf dieser und der vorherigen Seite zur Primzahlzerlegung genau an. Kannst du eine Gleichung aufstellen, in der „HN“, „Nenner“ und „Faktor“ vorkommen und die für jede einzelne Zeile stimmt?*

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**b)** *Wozu kann man die Gleichung gebrauchen?*

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**c)** *Führe die unter b) herausgefundene Methode mit den Nennern in der Tabelle auf der vorherigen Seite durch.*

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

# Addition von Brüchen

Das Ergebnis einer Bruchrechenaufgabe ist immer mit so kleinen Zahlen wie möglich anzugeben. Deshalb ist das Endergebnis, falls das möglich ist, **immer zu kürzen.**

• Hierzu ein Beispiel, wo das Ergebnis so weit wie möglich gekürzt wird:

| | |
|---|---|
| $\frac{4}{5} + \frac{12}{10}$<br>$= \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} + \frac{12}{10} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10}$<br>$\frac{8}{10} + \frac{12}{10} = \frac{20}{10}$<br>$\frac{20}{10} = \frac{10 \cdot \cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{10}{5}$<br>$\frac{10}{5} = \frac{2 \cdot \cancel{5}}{1 \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{1} = 2$ | Zuerst wird der Hauptnenner ermittelt. Er lautet 10 beziehungsweise Zehntel. Daher braucht nur der erste Bruch erweitert werden.<br>Danach rechnen wir die Aufgabe aus, d. h. addieren die Zähler.<br>$\frac{20}{10}$ lässt sich durch die Primzahl 2 kürzen, auch das kann man übersichtlich schreiben.<br>Damit ist das Kürzen jedoch noch nicht beendet, denn auch $\frac{10}{5}$ lässt sich durch eine Primzahl kürzen und zwar durch die 5. |

Man hätte das Ergebnis $\frac{20}{10}$ auch sofort durch 10 kürzen können, denn die 10 lässt sich in die beiden Primzahlen 2 und 5 zerlegen, durch welche wir das Ergebnis in zwei Schritten gekürzt haben.

| | |
|---|---|
| $\frac{4}{5} + \frac{12}{10} = \frac{4}{5} + \frac{6 \cdot \cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{4}{5} + \frac{6}{5}$<br>$\frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5}$<br>$\frac{10}{5} = \frac{2 \cdot \cancel{5}}{1 \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{1} = 2$ | Am Anfang hatten wir den Hauptnenner 10 ermittelt. Wenn wir aber gesehen hätten, dass man den zweiten Bruch auf Fünftel kürzen kann, wäre es einfacher gewesen.<br>Danach rechnen wir die Aufgabe aus, d. h. addieren die Zähler.<br>Nun brauchen wir nur noch durch 5 zu kürzen. |

Selbstverständlich ist es auch möglich, gemischte Brüche miteinander oder mit echten bzw. unechten Brüchen zu addieren.

• Beispiel: Gemischter Bruch und unechter Bruch

| | |
|---|---|
| $2\frac{2}{8} + \frac{4}{3}$<br>$= \frac{18}{8} + \frac{4}{3}$<br>$= \frac{18 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{54}{24} + \frac{32}{24}$<br>$\frac{54}{24} + \frac{32}{24} = \frac{86}{24}$<br>$\frac{86}{24} = \frac{43 \cdot \cancel{2}}{12 \cdot \cancel{2}} = \frac{43}{12}$<br>$= \frac{43}{12} = 3\frac{7}{12}$ | Zuerst müssen wir den gemischten Bruch in einen unechten Bruch umwandeln. $2 \cdot 8 = 16$; $16 + 2 = 18$<br>$\rightarrow 2\frac{2}{8} = \frac{18}{8}$<br>Zu $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ und 3 ist der HN $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$, die Faktoren zum malnehmen sind dann 3 und 8, wir erweitern also entsprechend damit.<br>Zähler addieren, Nenner übernehmen.<br>Die 6 am Ende des Zählers und die 4 am Ende des Nenners sind gerade Zahlen, wir können daher mit 2 kürzen.<br>Da 43 eine Primzahl ist, können wir nicht mehr kürzen.<br>Falls in der Aufgabenstellung gefordert, können wir das gekürzte Ergebnis auch zu einem gemischten Bruch umwandeln. 43 : 12 = 3, Rest 7 |



KEINE ANGST MEHR VOR BRÜCHEN
Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen verständlich erklärt und anschaulich dargestellt – Bestell-Nr. P12 924
KOHL VERLAG

# Subtraktion von Brüchen

Wie dir schon bekannt ist, stellt die Subtraktion die **Umkehroperation** der Addition dar, man könnte auch sagen, sie macht genau das Gegenteil.

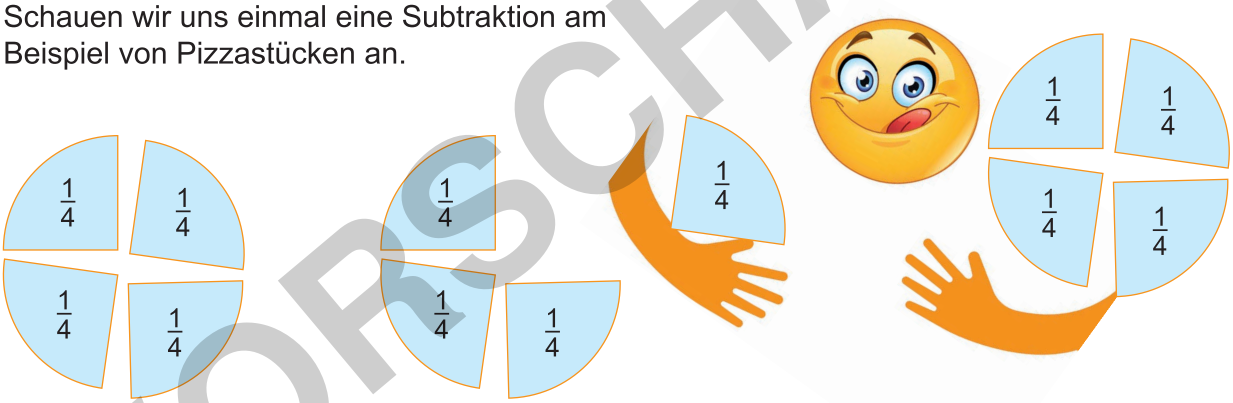
- Bei der Addition wird zu einer Anzahl Teile eine weitere Anzahl Teile hinzugefügt.
- Bei der Subtraktion wird von einer Anzahl Teile eine gewisse Anzahl Teile weggenommen.

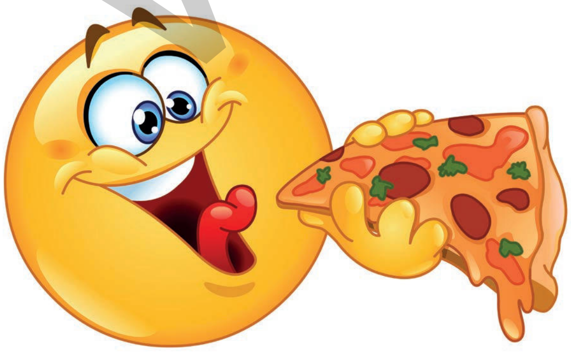
Die Teile müssen dabei alle gleich groß sein. Dies wird in der Bruchrechnung durch das Prinzip des gemeinsamen Nenners realisiert. Insgesamt gelten für die beiden sogenannten Strichrechenarten Addition und Subtraktion die gleichen Regeln.

Auch bei der **Subtraktion von Brüchen** werden **nur die Zähler und <u>nicht</u> die Nenner addiert.** Die Nenner bleiben unverändert und werden einfach in das Ergebnis der Aufgabe übernommen. Allerdings ist es dabei ganz wichtig, dass Brüche, die subtrahiert werden sollen, über einen **gemeinsamen Nenner** verfügen.

Sehen wir uns Beispiele an.

- $\frac{17}{3} - \frac{13}{3} = \frac{4}{3}$ . Wie unschwer zu erkennen ist, musste bei dieser Aufgabe lediglich eine Subtraktion bei den Zählern (17 – 13 = 4) erfolgen. Die Nenner ($\frac{\square}{3}$) blieben unverändert erhalten und wurden übernommen.
- Schauen wir uns einmal eine Subtraktion am Beispiel von Pizzastücken an.



Es sind 3 Pizzen vorhanden, die jeweils in Viertel geschnitten wurden. Zählst du die Viertel der Pizzen zusammen, erhältst du $\frac{12}{4}$ . Nimmst du von diesen $\frac{12}{4}$ jetzt 5 Stücke, also $\frac{5}{4}$ weg, bleiben $\frac{7}{4}$ übrig. Am Nenner hat sich nichts geändert, denn es bleiben Viertelstücke.

Wenn wir jetzt schnell, bevor die Pizzastücke aufgegessen sind, die Probe mit der mathematischen Umkehroperation zur Subtraktion, also mit der Addition, durchführen, würde diese lauten: $\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3$ und wir haben unsere Pizzen wieder.