

# Methoden im Fokus

## Mathematik unterrichten, aber wie?

Bei der Planung von Mathematikunterricht ist die Frage nach dem „Was“ meist schneller geklärt als die Frage nach dem „Wie“. Eine besondere Herausforderung liegt – vor dem Hintergrund unterschiedlicher Gegebenheiten und dem Wunsch nach Ausgewogenheit und Abwechslung – in der stimmigen Auswahl der Methoden, denn mittels verschiedener Methoden können unterschiedliche Ziele realisiert werden.

*Sollen meine Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff kennenlernen? Sollen sie mit Brüchen umgehen lernen? Werde ich den Satz des Pythagoras in diesem Schuljahr behandeln?* Sicher erscheinen Ihnen diese Fragen auf den ersten Blick merkwürdig, denn die Auswahl dessen, was Schülerinnen und Schüler lernen sollen, wird in Lehrplänen und Bildungsstandards einheitlich beantwortet.

Während das „Was“ für uns Lehrerinnen und Lehrer eher von außen gesteuert wird, beginnt beim „Wie“ unser eigentliches Kerngeschäft. *Wie vermitteln wir Schülerinnen und Schülern den Funktionsbegriff am besten? Wie können sie mit Brüchen umgehen lernen und wie den Satz des Pythagoras angehen?*

Für diese „Wie“-Fragen gibt es keine standardisierten Patentantworten. Vielmehr hängt ihre individuelle Beantwortung von der Lerngruppe, der Lehrperson und vielen weiteren Umständen ab – insbesondere aber auch von den genauer konkretisierten Lernzielen. Hierbei könnte man das Kernziel sicherlich mit der Vermittlung nachhaltigen und flexiblen mathematischen Wissens umreißen – was aber noch immer nicht die übergeordnete Frage beantwortet, wie „guter“ Unterricht generell aussieht, der dies effektiv gewährleistet und dabei die Interessen und Belange aller Beteiligten ernst nimmt (Barzel u. a. 2018).

### Methoden als Bindeglied zwischen fachlichem Inhalt und Unterricht

In den geschilderten Situationen spielen Methoden eine entscheidende Rolle. Sie ermöglichen eine klare Strukturierung unterrichtlicher Abläufe und

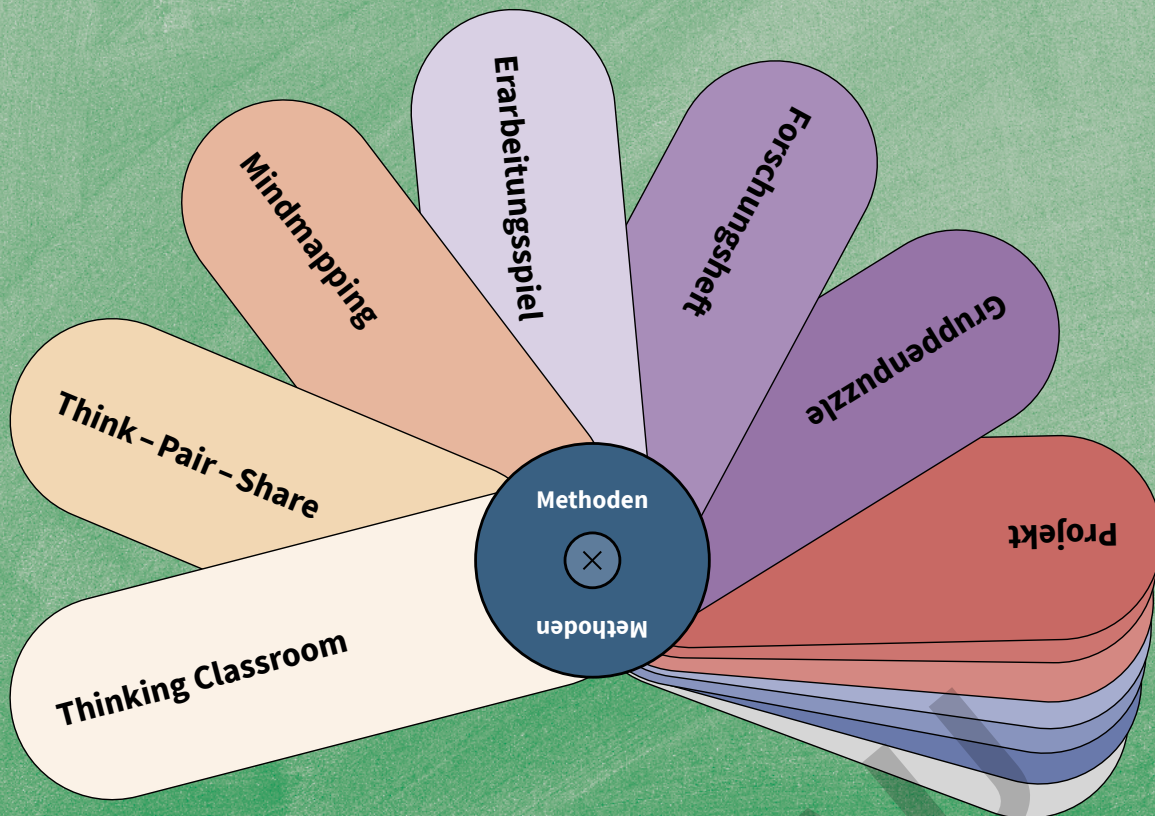
bieten die Möglichkeit, einzelne relevante Prozesse im Mathematikunterricht in der Planung und in der Durchführung zu ritualisieren. Sie schaffen somit den Rahmen für eine sinnstiftende Interaktion miteinander und erleichtern das Planen und Umsetzen unterrichtlicher Aktivitäten.

Dabei spannen die verschiedenen Methoden eine Fülle unterschiedlicher unterrichtlicher Aktivitäten auf, die etwa auf kollaboratives Arbeiten fokussieren (siehe den Beitrag **Kommunikationsförderung durch Think – Pair – Share?**), digitale Anreicherungen ins Blickfeld rücken (siehe den Beitrag **Selbstreguliert lernen im Lernpfad**) oder durch handlungsorientierte, szenische Elemente versuchen, Schülerinnen und Schülern einen anderen Blick auf den mathematischen Lerngegenstand zu offenbaren (siehe den Beitrag **Lineare Funktionen in Szene setzen**). Auch wenn diese ganz unterschiedlich anmutenden, exemplarischen Zugänge zum Mathematikunterricht auf den ersten Blick unvereinbar erscheinen, lassen sich ihre Gemeinsamkeiten sehr gut greifen.

### Was versteht man unter einer Methode für den Mathematikunterricht?

Methoden (von griechisch μέθοδος, *méthodos*) sind wörtlich wie sinnbildlich der „Weg zu etwas“ (zusammengesetzt aus μετά, *metá* → „hinter, nach“ und ὁδός, *hodós* → „Weg“). In diesem Sinne sind sie Instrumente der Zielerreichung, so wie konkrete Untersuchungsmethoden einer Ärztin den Weg zur Diagnose ebnen.

Der Begriff „Methode“ bezieht sich hier also nicht ausschließlich auf eine konkrete Durchführung von Unterricht, sondern betont vielmehr seine strukturelle Planung ebenso wie das Repetitive darin. Insofern handelt es sich bei einer Methode um eine weitgehend universelle Schablone, die im Wesentlichen zunächst losgelöst vom jeweils zu erarbeitenden Inhalt ist – obgleich sie natürlich nur in Verbindung mit einem solchen konkreten fachlichen Inhalt ihr Potenzial entfalten kann. Der Ausspruch „Das hat Methode“ rückt das hiermit in Zusammenhang stehende planvolle, theoriegeleitete und insbesondere zielgerichtete Vorgehen prägnant in den Fokus (vgl. **Kasten 1** nach Barzel u. a. 2018, S. 88).



### Welche Funktionen erfüllen Methoden im Mathematikunterricht?

Mathematikunterricht besteht in Planung und Durchführung aus charakteristischen, wiederkehrenden und sich ergänzenden Unterrichtsphasen, in denen unterschiedliche Ziele erreicht werden sollen (Prediger u. a. 2014). Diese lassen sich mit unterschiedlichen Methoden verschieden gut realisieren.

- Beim Erkunden, Entdecken, Erforschen und Explorieren geht es um die eigene Auseinandersetzung der Lernenden mit dem Inhalt. Diese Phase ist meist verbunden mit dem Ziel der kognitiven Aktivierung (z. B. von Vorwissen oder Alltagserfahrungen). Entsprechend sollten die in dieser Phase eingesetzten Methoden genügend Freiräume für die Beschäftigung mit dem Lerngegenstand schaffen.
- In Phasen des Ordners, Strukturierens, Systematisierens und Sicherens wird ein nachhaltiger, konsolidierter Wissensaufbau angestrebt. Hierzu unterstützende Methoden bieten Gelegenheit zur Organisation, regen zum Austausch über die eigenen Ergebnisse an und geben meist der Lehrkraft die Möglichkeit, die unterrichtlichen Interaktionen zu steuern.
- In Phasen des Übens werden Fertigkeiten automatisiert und eingeübt, das Wissen wird vertieft, Konzepte für den Transfer vorbereitet oder die Qualität vorhandener Heuristiken gesteigert (Renkl 2000). Damit beschreibt das Üben eine Phase des Mathematikunterrichts, die höchst individuelle Anforderungen an die einzelnen

Lernenden hat. Dies äußert sich in Methoden, die das neu Erlernte entsprechend wiederholen, Kooperation und Kommunikation ermöglichen sowie eine konstruktive Unterstützung durch die Lehrkraft bieten.

- In einer Phase des gezielten Diagnostizierens und Überprüfens von Fähigkeiten werden üblicherweise Methoden eingesetzt, die vielfältige unterschiedliche Lösungswege anregen, individuelle Rückmeldungen ermöglichen und es erlauben, kooperativ von und mit anderen zu lernen.

Ein breiter Methodenfächer bietet große Auswahl für den Mathematikunterricht.

### 1 | Wissenswert: Methodenbegriff

Eine Unterrichtsmethode ist eine typische Handlungsfolge im Unterricht, die folgende Aspekte umfasst:

- Sie hat allgemeinen Charakter, d. h., sie kann in ähnlicher Form flexibel in immer neuen Zusammenhängen ablaufen.
- Sie ist zielorientiert, d. h., sie ist verbunden mit klar formulierten, spezifischen Funktionalitäten, die es möglich machen, zu entscheiden, inwiefern die Methode zum Erreichen bestimmter Ziele geeignet ist.
- Sie ist strukturiert, d. h., sie beschreibt, auf welche Weise die Beteiligten (im Idealfall) handeln und miteinander kommunizieren.

(vgl. Barzel u.a. 2018, S. 22)

## Methodenmerkmale

Methoden sind ebenso vielfältig wie die Ziele, deren Erreichbarkeit sie dienen. Verbunden mit verschiedenen fachlichen Inhalten ergibt sich auf den ersten Blick ein fast endlos erscheinendes Repertoire an Möglichkeiten zur Unterrichtsgestaltung. Dennoch lassen sich Merkmale herausarbeiten, anhand derer diese mannigfaltigen Methoden zu einzelnen Gruppen zusammengefügt werden können. Dies erleichtert den Überblick und die Auswahl.

### Merkmal „Dauer“

Methoden dauern unterschiedlich lang. Sie können wenige Minuten strukturieren, eine einzelne Unterrichtsstunde (z. B. ein Übungsspiel) oder eine Doppelstunde (z. B. ein Gruppenpuzzle) andauern, sich über mehrere Stunden erstrecken (z. B. ein Projekt) oder langfristig über ein gesamtes Schuljahr angelegt sein (z. B. ein Lerntagebuch).

### Merkmal „Komplexität“

Während einige Methoden strukturell auch für Unerfahrene einfach zu greifen sind (z. B. Ich – Du – Wir), müssen für andere Methoden komplexe Handlungsabläufe eingehalten werden und benötigen daher eine deutliche Einarbeitungszeit (z. B. ein Übungs- oder Erarbeitungsspiel oder ein Expertenpuzzle).

### Merkmal „Modus“

Methoden unterscheiden sich mit Blick auf ihre Anwendbarkeit in einem bestimmten „Modus“: Einige können vor allem im Rahmen des Präsenzunterrichts Anwendung finden, andere Methoden sind eher für den Bereich des informellen Lernens, etwa im Rahmen einer Hausaufgabe geeignet. Manche Methoden funktionieren ohne jedwede materielle Ausstattung, andere hingegen setzen Materialien oder Medien voraus. So entfalten letztlich manche Methoden ihre Wirkung erheblich zielführender im analogen, andere hingegen vor allem im digitalen oder digital erweiterten Raum. Es kristallisiert sich ein unterschiedliches Digitalisierungspotenzial heraus: Der Einsatz digitaler Medien bringt bei manchen Methoden (z. B. Placemat) keinen oder wenig Mehrwert mit sich, wohingegen andere Methoden durch entsprechende Medien deutlich profitieren oder erst ermöglicht werden (z. B. Erstellen von Erklärvideos).

### Merkmal „Aktivierungsgrad“

Im Idealfall soll jede Methode die Schülerinnen und Schüler in besonderem Maß kognitiv aktivieren, was schließlich eine zentrale Gelingensbedingung von gutem Unterricht ist (Praetorius u. a. 2018). Es gibt jedoch Methoden, die aufgrund der erforderlichen Organisation nicht grundsätzlich gewährleisten,

dass alle Lernenden durchweg derart aktiv sind, wie es wünschenswert wäre. Das naheliegendste Beispiel ist der klassische Frontalunterricht. Auch gibt es Methoden, bei denen zwangsläufig jeder Schüler, jede Schülerin einen Beitrag leisten muss (z. B. Expertenpuzzle), während sie bei anderen Methoden unterschiedliche große bis keine Beiträge leisten können (z. B. Gruppenerarbeitung).

### Merkmal „Differenzierungsvermögen“

In jeder Lerngruppe finden sich höchst unterschiedliche Ausgangsvoraussetzungen. Dies betrifft unter anderem die Einstellungen der jeweiligen Schülerinnen und Schüler, ihre Motivation, ihre Metakognition, ihre fachlichen Vorkenntnisse, ihr Leistungsvermögen oder ihre präferierten Zugangsweisen. Verschiedene Methoden tragen diesem Umstand in unterschiedlichem Maße Rechnung.

## Vielfältige Methoden oder Methodenvielfalt

Monomethodischer Unterricht ist nicht sonderlich effizient und zudem meist langweilig – für Lernende und Lehrende –, so weit besteht wissenschaftlicher Konsens. Auf der anderen Seite liegt auf der Hand, dass ein Überangebot unterschiedlicher, häufig wechselnder Methoden nach dem „Gießkannenprinzip“ gerade die ihnen inhärente Leitfunktion einer stützenden Ritualisierung konterkariert.

In diesem Zusammenhang lassen sich innerhalb der empirischen Forschung Hinweise finden, dass eine „mittlere Methodenvielfalt“ ein Kennzeichen guten Unterrichts ist (Helmke 2003; Barzel u. a. 2018, S. 57). Entsprechend beschreibt Hilbert Meyer in einem viel zitierten Artikel zu Merkmalen guten Unterrichts (Meyer 2003) die Methodenvielfalt als ein solches Merkmal wie folgt:

### Begriff der „Methodenvielfalt“

Methodenvielfalt liegt dann vor, wenn der Reichtum der verfügbaren Inszenierungstechniken, Handlungs- und Verlaufsmuster des Unterrichts genutzt wird, wenn die Sozialformen variiert und verschiedene Grundformen des Unterrichts (= lehrgangsförmiger Unterricht, Planarbeit, Freiarbeit, Projektarbeit) praktiziert werden.


## Zur Auswahl von Methoden

Entsprechend ist es von besonderer Bedeutung, die für den eigenen Mathematikunterricht verwendbaren Methoden sorgfältig zu sichten und zu wählen.

AUSSCHNEIDEBOGEN

**Gestufte Hilfekarten – Lehrermaterial – ggf. mehrfach kopieren**

Die folgenden Hilfekarten können ausgeschnitten und in mehrfacher Ausfertigung griffbereit bereitliegen, um die Lernenden beim Finden von Strategien zum Größenvergleich der Tiergehege zu unterstützen. Angepasst an den Lernprozess können Sie eine Begriffskarte oder einen visuellen Hinweis ausgeben.

		
<p>Umlegen</p>		<p>Auslegen</p>
<p>Was steht über?</p>	<p>Zerlegen</p>	

Umlegen, Zerlegen und Auslegen (vgl. **Abb. 1**). Damit ist eine Lösungswegevieleit für den konkreten Lerninhalt gegeben.

### Eignet sich der Lerninhalt?

Bei der Entwicklung eines Konzepts zum Flächeninhalt müssen die Lernenden zwischen Form, Inhalt und Umfang einer Fläche differenzieren. In der Grundschule werden Flächeninhalt und Umfang meist gemeinsam für die Beschreibung der Größe einer Fläche unterrichtet. In der 5. Klasse ist nun der Aufbau konzeptuellen Verständnisses notwendig, um einer Verwechslung der Größen Umfang und Flächeninhalt vorzubeugen (Weiher/Ruwisch 2018).

Die Einführung des Konzepts „Flächeninhalt“ eignet sich für die Umsetzung in einem Problemlösen-vor-Erklärung-Lernszenario, da konzeptuelles Verständnis aufgebaut werden soll (s. oben). Zudem gibt es mehrere Strategien (Umlegen, Zerlegen, Auslegen), um Flächeninhalte zu vergleichen, was eine Lösungswegevieleit ermöglicht. Eine solche selbstdifferenzierend gestaltete Problemstellung kann Präkonzepte oder intuitive Ideen der Lernenden

sichtbar machen. Die individuellen Lösungen werden dabei in der Regel unvollständig und zumindest unterschiedlich sein, was eine anschließende Erklärphase erforderlich macht.

### Wie wird die Problemlösephase gestaltet?

In Kleingruppen untersuchen die Lernenden, welches Tier am meisten Platz in seinem Zoogehege hat (vgl. **Arbeitsblatt 1/2**, nach Holzäpfel u. a. 2011 und 2012).

Die Lernenden werden in ihrem „Forscherheft“ (**Arbeitsblatt 1a und 1b**) aufgefordert, mehrere Lösungswege zum Größenvergleich der Tiergehege zu entwickeln und zu notieren. Unterstützt werden kann dieser Prozess durch Materialien, wie Scheren oder Legeplättchen.

Durch individuelle Hilfekärtchen mit Hinweisen zu den möglichen Vergleichsstrategien (**Material**) können die einzelnen Gruppen im Problemlöseprozess unterstützt werden. Die Strategie des Umlegens ist sehr intuitiv, sodass jede Gruppe mindestens diese Strategie notieren kann. Die meisten Gruppen finden ausschließlich eine oder maximal zwei Vergleichsstrategien. Der Lernprozess ist daher noch nicht abgeschlossen; eine Erklärphase ist notwendig, um auch die jeweils anderen Vergleichsstrategien kennenzulernen.

### Wie wird die Erklärphase gestaltet?

Im Rahmen der Erklärphase werden die einzelnen Vergleichsstrategien von verschiedenen Gruppen vorgestellt und im Plenum hinsichtlich der Vor- und Nachteile diskutiert. Lernförderlich erweist sich die explizite Aufforderung zum Vergleich der Lösungswege: Die Lernenden erkennen, dass alle Strategien Vor- und Nachteile besitzen, sodass jede Strategie für bestimmte Situationen ihre Berechtigung hat. Die Lernenden erkennen ihre Wissenslücken (Fehlen weiterer Strategien) und haben Gelegenheit, diese zu schließen.

Lernenden heraus. Sie werden jedoch nicht frustriert, sondern beschäftigen sich beständig mit dem Problem („sweet spot“, Kapur/Bielaczyc 2012). Dabei haben die Lernenden in dieser Phase die Möglichkeit, ihre individuellen Ideen möglichst uneingeschränkt zu verwirklichen. Sie können hier enaktiv, ikonisch oder symbolisch arbeiten oder zwischen den Darstellungsebenen wechseln. Das Übereinanderlegen (Umlegen) der Flächen kann als sehr intuitive Strategie von allen Lernenden erwartet werden. In der anschließenden Erklärphase vervollständigen die Lernenden ihr Repertoire an Vergleichsstrategien und erkennen Vor- und Nachteile der Strategien.

### Literatur

- Holzäpfel, L./Leuders, T./Marxer, M. (2011): Lebensraum Zoo – Wie viel Platz haben die Tiere? *MatheWelt in ML* 164.
- Holzäpfel, L./Leuders, T./Marxer, M. (2012): Lebensraum Zoo – Platzbedarf von Tieren. – In: Barzel, B./Hußmann, S./Leuders, T./Prediger S. (Hrsg.): *Mathewerkstatt. Klasse 5* Cornelsen S. 167–194.
- Leuders, T./Hußmann, S./Barzel, B./Prediger, S. (2011): „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. – In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(37), S. 2–9.
- Kapur, M./Bielaczyc, K. (2012): Designing for Productive Failure. – In: *Journal of the Learning Sciences*, 21(1), S. 45–83.
- Kirschner, P. A./Sweller, J./Clark, R. E. (2006): Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. – In: *Educational psychologist*, 41(2), S. 75–86.
- Li, Q./Ma, X. (2010): A Meta-analysis of the Effects of Computer Technology on School Students' Mathematics Learning. – In: *Educational Psychology Review*, 22(3), S. 215–243.
- Loibl, K./Roll, I./Rummel, N. (2017): Towards a theory of when and how problem solving followed by instruction supports learning. – In: *Educational Psychology Review*, 29(4), S. 693–715.
- Weiher, D. F./Ruwisch, S. (2018): Kognitives Schätzen aus Sicht der Mathematikdidaktik: Schätzen von visuell erfassbaren Größen und dazu erforderliche Fähigkeiten. – In: *mathematica didactica*, 41(1), S. 77–103.

## Differenzierung auf den Punkt gebracht

### Aspekte der Heterogenität:

- Vorwissen
- intuitive Ideen
- Vorlieben für Zugänge

### Methode:

- selbstdifferenzierende Problemlöseaufgabe bietet unterschiedliche Zugänge/Strategien.
- Material unterstützt beim Größenvergleich
- Hilfekarten zu Strategien

### Praxistipp:

Wählen Sie eine Problemlöseaufgabe, zu der die Lernenden Vorwissen und intuitive Ideen haben könnten, die sie in der Erkundung aktivieren und anwenden. Regen Sie in der Erklärphase Vergleiche zwischen den fehlerhaften/unvollständigen und den richtigen Lösungen an.

## Rückblick

Die Problemaufgabe zum Größenvergleich von Tiergehegen

# Mit Fehlern lernen

## Wie müssen wir unterstützen, damit die Methode des Fehlerhelferblatts wirklich funktioniert?

**LERNGRUPPE:** 5 bis 13

**IDEE:** Damit Lernende effektiv aus Fehlern lernen können, müssen Lehrkräfte vielseitig unterstützen

**ARBEITSBLATT:** Fehler analysieren

**ONLINE-MATERIAL:** Vorlage Fehlerhelferblatt

**ZEITBEDARF:** 1 Doppelstunde (und die ganze Schulzeit)

Wir sind in Klasse 7c, ich gebe die erste Klassenarbeit des Schuljahres zurück und habe Lösungen von Lernenden fotografiert, die ich für die Besprechung nutzen will. Darunter sind richtige Ergebnisse, falsche Lösungen, unvollständige Ansätze – in meiner Wahrnehmung handelt es sich jedoch immer um interessante Ideen, die ich nun in der Klasse diskutieren will.

Mathilda fragt: „Aber wie machen wir das denn genau? Ich kann mir vorstellen, dass sich dann einige bloßgestellt fühlen, wenn da Fehler drin sind ...“ Yéro schaltet sich ein: „Wir haben das letztes Jahr auch schon gemacht, das war eigentlich immer okay. Und wir analysieren die Fehler dann auch immer.“ Gewiss ist sich Yéro nicht bewusst, dass er da gerade ein großes Kompliment an den vorherigen Mathematikunterricht ausgesprochen hat. Und ganz nebenbei benennt er die zentralen Gelingensbedingungen dafür, dass Lernende aus Fehlern wirklich lernen können: die emotionale Akzeptanz, offen darüber zu sprechen, und die analytische Aufarbeitung.

### Konstruktiver Umgang mit Fehlern

Fehler spielen im Mathematikunterricht eine große Rolle. Ein

konstruktiver Umgang damit, wie ihn Yéro andeutet, ist ein Qualitätsmerkmal des Unterrichts und wird in Bildungsplänen als ein didaktischer Grundsatz formuliert. Auch ist die hierzu vorgestellte Methode des Fehlerhelferblatts nicht neu (vgl. Katzenbach 2004, Ehret/Schmidt 2009). Wenn wir uns mit Kolleg:innen austauschen, ist diesen die Idee vom Fehlerhelferblatt bekannt, und gelegentlich kommt es nach Klassenarbeiten zum Einsatz.

In unserer eigenen Praxis sehen wir bei Lernenden häufig Ergebnisse, die uns als Lehrende nicht zufriedenstellen können. In **Abb. 1**, Beispiel 1 hat der Schüler seinen eigenen Fehler gar nicht verstanden. Zumindest ist er nicht in der Lage, seine Gedankengänge aus der Klassenarbeit zu beschreiben und zu erläutern, welcher Aspekt daran fehlerhaft war. Beispiel 2 offenbart eine weitere Problematik: die Selbstattribution. Bei beiden Ergebnissen können wir stark anzweifeln, dass hier Lernen stattgefunden hat.

Unserer Überzeugung nach kann das Fehlerhelferblatt jedoch eine wirkungsvolle und kognitiv aktivierende Methode im Lernprozess sein. Deshalb fragen wir: Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit Lernende mithilfe des Fehlerhelferblatts wirksam lernen können?

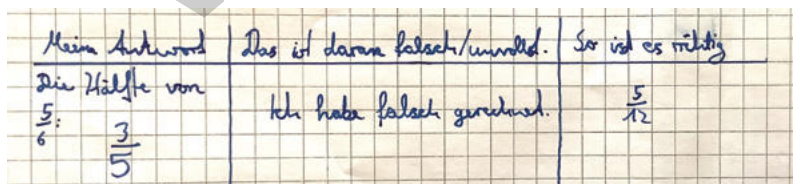
### Beschreibung der Methode

Damit Lernende aus ihren eigenen Fehlern lernen können, ist ein Ablauf in drei Schritten sinnvoll (vgl. Prediger/Wittmann 2009):

#### Schritt 1: Das Erkennen

Damit Lernende ihren Fehler überhaupt

Beispiel 1:



Beispiel 2:

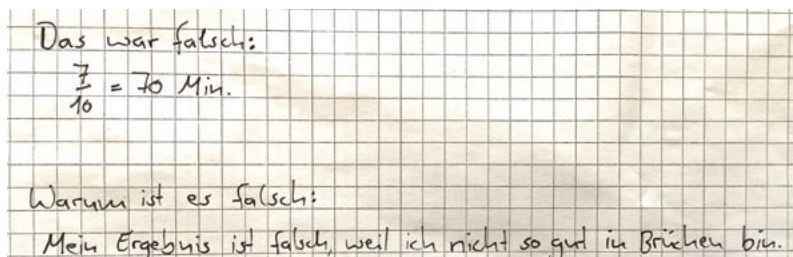


Abb. 1: Ergebnisse von Lernenden, die nicht zufriedenstellen können