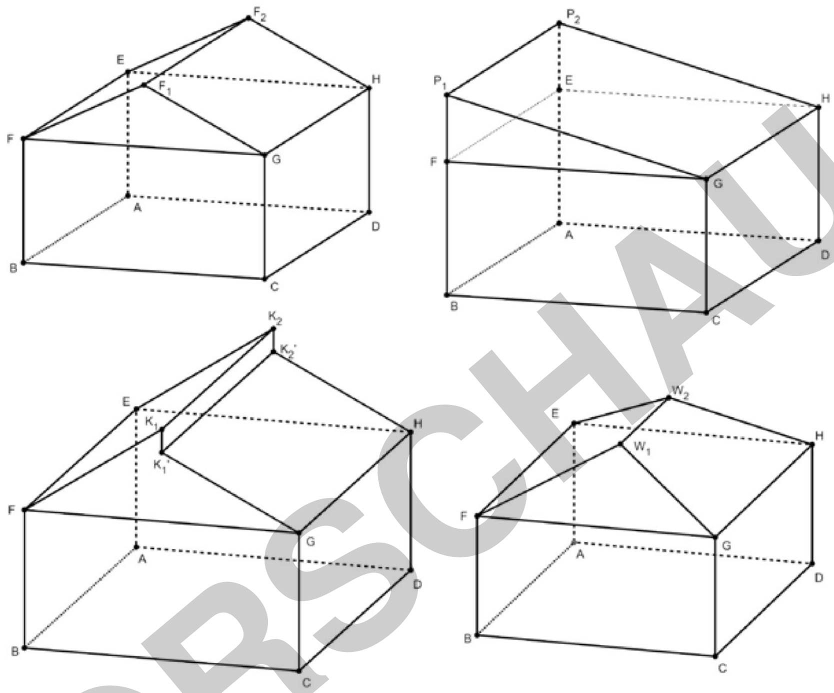
Gebäudeformen und Geometrie: Festzelt, Pavillon und verschiedene Dachformen

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Was der Mensch errichtet, lässt sich praktisch immer mit den Werkzeugen der Geometrie beschreiben. Mit einigen Punkten, Geraden und Ebenen lässt sich bereits eine Vielzahl an architektonischen Konzepten abbilden.

In diesem Material untersuchen die Schülerinnen und Schüler ein Festzelt, einen Pavillon sowie die verschiedenen Varianten eines Dachs mit den Werkzeugen der analytischen Geometrie. Sie bestimmen beispielsweise fehlende Punkte und berechnen Schnittwinkel, Flächen und Volumen. Dabei trainieren sie ihr räumliches Vorstellungsvermögen und lernen, beschreibende Texte in die Sprache der Mathematik zu übertragen.

Die drei Übungsblätter eignen sich zur gemeinsamen Bearbeitung im Unterricht oder als Hausübung, lassen sich aber auch als Tests mit Bewertungsschlüssel und Zeitvorgabe verwenden. In einem Fall bietet der Umfang der Aufgaben auch die Möglichkeit einer zweistündigen Klausur.

Gebäudeformen und Geometrie: Festzelt, Pavillon und verschiedene Dachformen

Oberstufe (grundlegend)

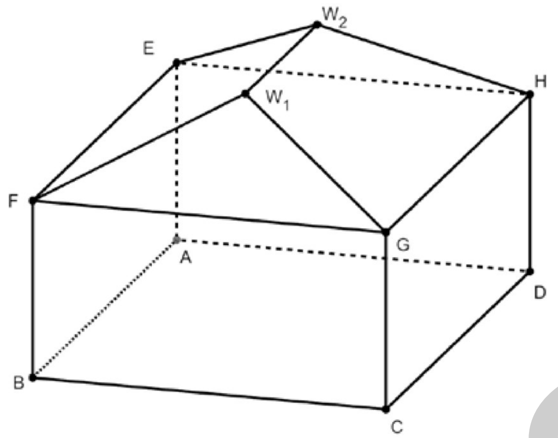
Alfred Müller

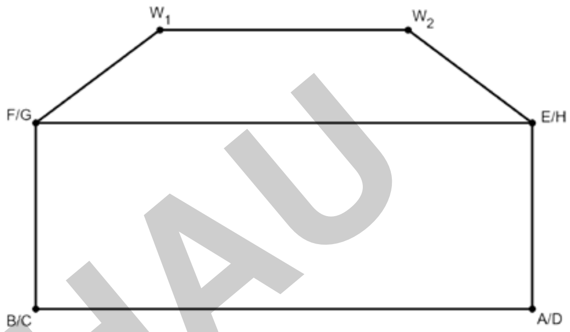
Die Schülerinnen und Schüler lernen:

im Rahmen von anschaulichen Beispielen die Werkzeuge der Analytischen Geometrie einzusetzen. Die Lernenden arbeiten im dreidimensionalen Koordinatensystem und verwenden Geraden- und Ebenengleichungen. Dabei trainieren sie nicht nur ihr räumliches Vorstellungsvermögen, sondern auch ihr Abstraktionsvermögen, wenn sie Aufgabenstellungen, die in Textform vorliegen, in die Sprache der Mathematik übersetzen.

c) Auf dem Grundstück steht im Punkt $P(8|40|0)$ ein 12 m hoher Tannenbaum. Zeigen Sie, dass der Schatten des Baumes das Haus nicht trifft, wenn die Sonne in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ einstrahlt.
Wie lang ist bei diesem Licht der Schatten des Baumes? **[3 BE]**

3. Eine weitere mögliche Dachform ist ein **Walmdach** (siehe Abbildungen)





Grafiken: Günter Gerstbrein

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes W_2, wenn der Punkt $W_1(12|6|9)$ gegeben ist. **[2 BE]**

b) Berechnen Sie die Winkel β_1 und β_2 zwischen dem Dachboden EFGH und der Dachfläche FGW_1 bzw. der Dachkante $[GW_1]$ sowie den Inhalt der Gesamtdachfläche. **[2 BE]**

c) Die Dachflächenebenen D_1 durch die Punkte FGW_1 und D_2 durch EHW_2 schneiden sich in einer Geraden s. Bestimmen Sie ihre Gleichung. **[2 BE]**
Ein Entlüftungsrohr steht senkrecht auf dem Dachboden EFGH und durchstößt das Dach im Schwerpunkt des Dreiecks FGW_1. Ermitteln Sie die Koordinaten der Spitze S_1 des Rohres, wenn es 4 m über die Dachboden-Ebene EFGH reicht.
Welchen Abstand hat die Spitze S_1 von der Dachflächenebene D_1? **[2 BE]**

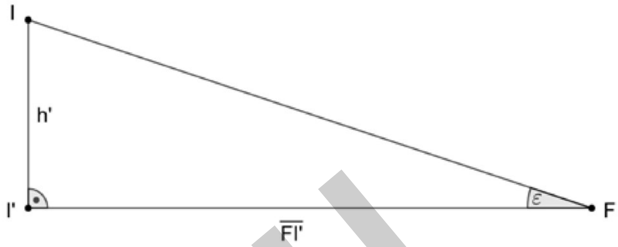
Bewertungsschlüssel

Rohpunkte	Notenpunkte	Note
40, 39	15	1+
38, 37	14	1
36, 35	13	1–
34, 33	12	2+
32, 31	11	2
30, 29	10	2–
28, 27	9	3+
26, 25	8	3
24, 23	7	3–
22, 21	6	4+
20, 19	5	4
18, 17	4	4–
16–14	3	5+
13–11	2	5
10, 9	1	5–
≤8	0	6

Der Winkel ε lässt sich auf zwei verschiedene Arten berechnen:
vektoriell:

$$\cos\varepsilon = \frac{\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{e_3}}{\left|\overrightarrow{n_{E_1}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_3}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\9\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{82}\cdot 1} = \frac{9}{\sqrt{82}} \Rightarrow \varepsilon = 6{,}34°$$

Elementargeometrisch (zugunsten besserer Erkennbarkeit sind die Seitenlängen des nebenstehend abgebildeten Dreiecks nicht maßstabsgetreu):



Grafik: Günter Gerstbrein

$$h' = 1\text{ m} \wedge \overline{FI'} = 9\text{ m} \Rightarrow \tan\varepsilon = \frac{1}{9} \Rightarrow \varepsilon = 6{,}34°$$

Da beide Dachflächen gleich groß sind, erhält man für die Dachfläche:

$$A_{Dach} = 2\cdot A_{\square FGKI} = 2\cdot\left|\overrightarrow{FI}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FG}\right| = 2\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-9\\1\end{pmatrix}\right|\cdot 25 = 50\sqrt{82} \approx 452{,}77\text{ m}^2$$

c) Ebene E_2:

$$E_2: \vec{x} = \vec{e} + \sigma\cdot\overrightarrow{EI} + \tau\cdot\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}25\\0\\3\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\9\\1\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}-25\\0\\0\end{pmatrix}$$

Normalenvektorbestimmung mithilfe des Kreuzprodukts:

$$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix}0\\9\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-25\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-25\\225\end{pmatrix} = -25\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-9\end{pmatrix}$$

$$E_2: \begin{pmatrix}0\\1\\-9\end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\-9\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}25\\0\\3\end{pmatrix} = -27 \Rightarrow E_2: x_2 - 9x_3 + 27 = 0$$