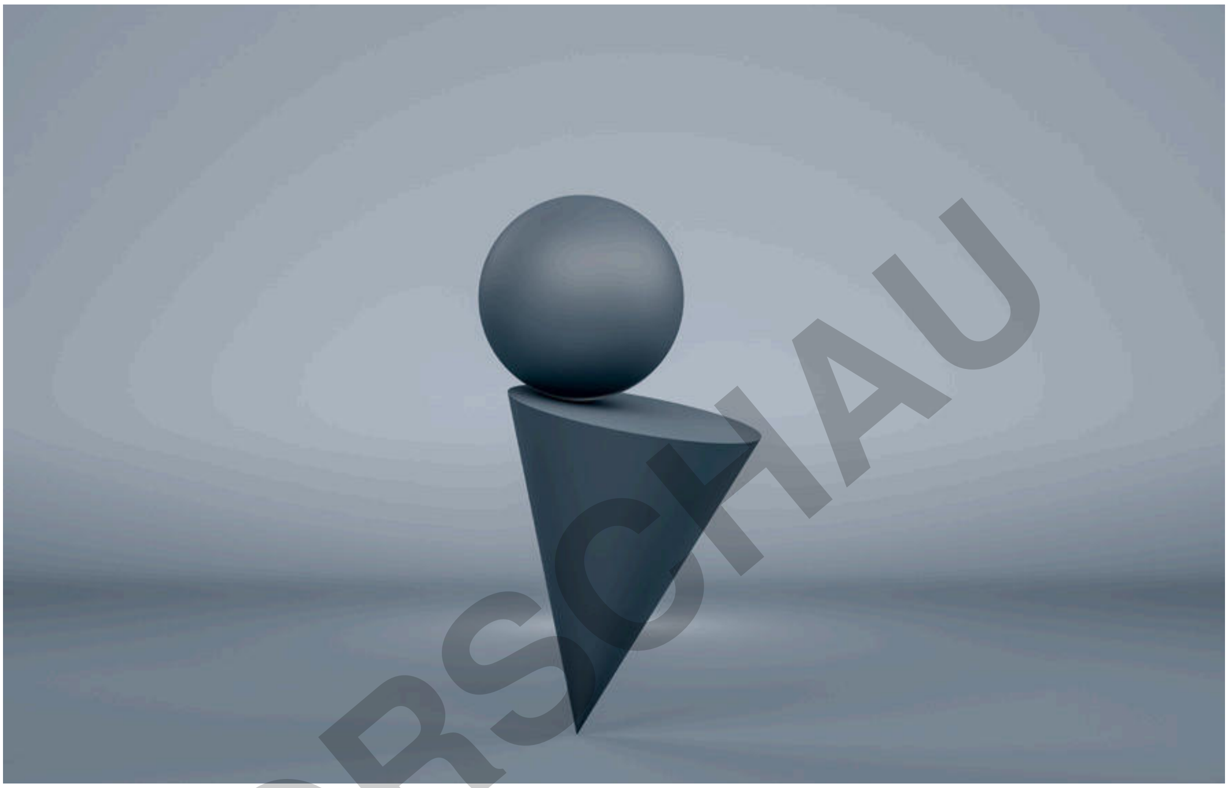
Kugeln, Kegel, Dreiecke

Alfred Müller



© akinbostanci / iStock / Getty Images Plus

Drei Übungsblätter bieten eine Reihe von Aufgaben, in denen es sich um Kugeln in Verbindung mit Dreiecken oder auch mit Kegeln dreht. Dabei werden Schnittpunkte, Schnittkreise, Schnittwinkel bestimmt sowie Flächen und Volumina berechnet. Beim Arbeiten im dreidimensionalen Koordinatensystem trainieren die Schülerinnen und Schüler auch ihr räumliches Vorstellungsvermögen.

Kugeln, Kegel, Dreiecke

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

den Umgang mit Kugeln in einem dreidimensionalen Koordinatensystem in Verbindung mit dreieckigen Flächen sowie mit Drehkegeln. Sie bestimmen Schnittpunkte, Schnittkreise und Schnittwinkel und berechnen Flächen und Volumina.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Kugeln	M1	AB
Kugeln und Dreiecke	M2	AB
Kugeln und Kegel	M3	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kugel, Kugelgleichung, Dreieck, Kegel, Tangente, Tangentialebene, Schnittwinkel, Schnittpunkt, Schnittkreis, Fläche, Volumen

Medien: GTR, CAS

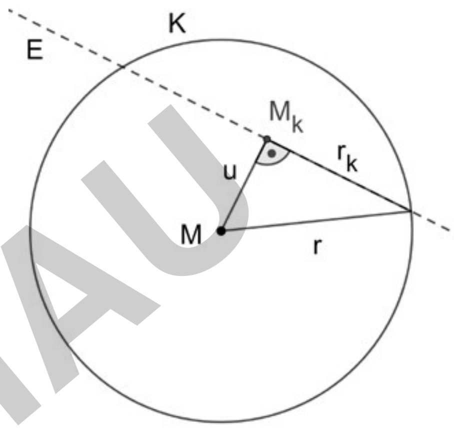
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Mittelpunkt M_k und Radius r_k des Schnittkreises:
Die Gerade durch M senkrecht zur Ebene E schneidet diese im Punkt M_k :

$$\ell:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} \text{ in } E: 2+4\lambda+6+9\lambda+18+36\lambda-173=0$$

$$49\lambda=147\Rightarrow\lambda=\frac{147}{49}=3\Rightarrow R(7|11|21)$$

Abstand u des Mittelpunktes M von der Ebene E:
Berechnung mit der Hesse-Form:

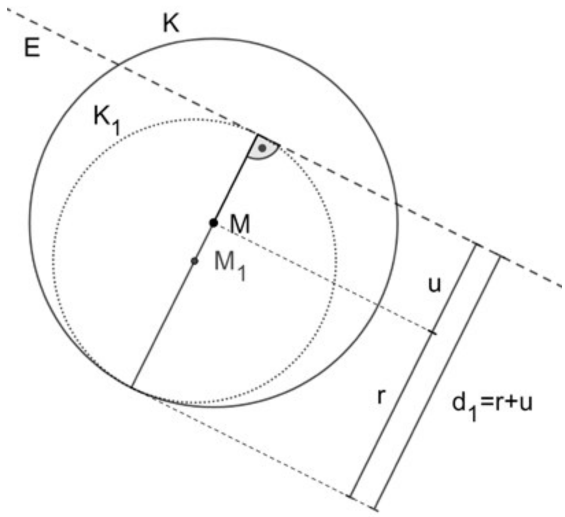


$$E_H:\frac{1}{7}(2x_1+3x_2+6x_3-173)=0$$

$$\Rightarrow d=\left|\frac{1}{7}(2+6+18-173)\right|=\frac{147}{7}=21$$

Für den Radius des Schnittkreises gilt mit dem Satz des Pythagoras:
$$r_k^{\,2}=r^2-u^2=1225-441=784\Rightarrow r_k=28$$

c) Gesucht sind der Mittelpunkt M_1 und der Radius r_1 der größten Kugel:
Mit dem Ergebnis aus 1b) erhält man für den Durchmesser d_1 (und in weiterer Folge den Radius r_1) der gesuchten Kugel:



Grafiken: Günter Gerstbrein

$$d_1=r+u=35+21=56\Rightarrow r_1=\frac{d_1}{2}=28$$

Der Mittelpunkt M_1 liegt somit 35 – 28 = 7 LE von M in Richtung des Normalenvektors von E entfernt.

$$\overrightarrow{m_1}=\overrightarrow{m}+7\cdot\overrightarrow{n_E^0}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+7\cdot\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix}\Rightarrow M_1(3|5|9)$$