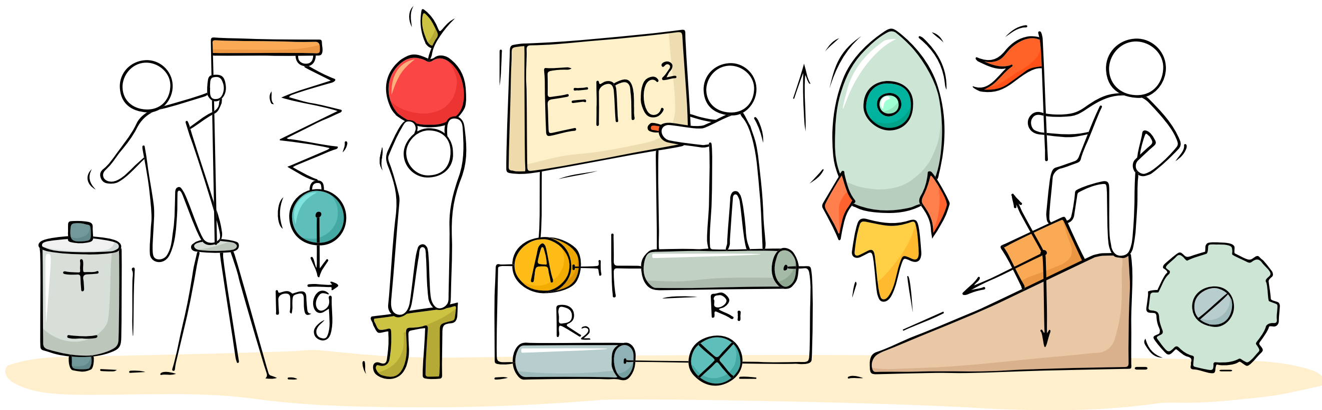


# Mathe in physikalischen Kontexten unterrichten

## Chancen nutzen, Herausforderungen begegnen



FREDERIK DILLING, BENJAMIN ROTT, INGO WITZKE

**Die Physik bietet spannende, aber auch herausfordernde Einsatzmöglichkeiten für mathematische und fächerverbindende Lernprozesse und gilt als klassisches Anwendungsgebiet der Mathematik.**

Häufig findet man den Hinweis, dass es für den Mathematikunterricht förderlich ist, wenn sich dieser an geeigneter Stelle an realistischen Anwendungen orientiert. Nach Heinrich Winter, dessen Grunderfahrungen praktisch alle aktuellen Lehrpläne prägen, sollte der Mathematikunterricht unter anderem dazu beitragen, dass „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art“ (Winter 1996) erkannt werden.

Gerade die Physik, die sich bekanntlich systematisch damit beschäftigt, Phänomene der unbelebten Natur mathematisch zu beschreiben, erscheint hierfür besonders geeignet. Nun wissen wir aus Gesprächen mit Mathematiklehrkräften und aus eigenen Erfahrungen in der Aus- und Weiterbildung, dass (physikalischer) Anwendungsbezug zwar durchaus gern zur Legitimation des Unterrichtes herangezogen wird, dieser aber doch relativ selten (außer zu illustrierenden oder motivationalen Zwecken) wesentlichen Eingang in diesen findet. Hierfür gibt es sicherlich eine Vielzahl von Gründen. Wer insbesondere Physik nicht als weiteres Fach unterrichtet, benötigt didaktisch aufbereitete Zugänge, um physikalische Kontexte effektiv und sachgemäß in den Unterricht zu integrieren. Nur so gelingt es, den physikalischen Kontext nicht als „Zeithindernis“ oder „Hemmschuh“ wahrzunehmen, sondern als lebhafte und authentische Variante für neue Zugänge zu mathematischen Begriffen und Problemstellungen.

1 WISSENSWERT

### Klassiker aus der Physik im Mathematikunterricht

- Maßeinheiten (Länge, Zeit, Masse) in den Themenbereichen *Einheiten* sowie *Dezimalzahlen*
- Temperaturen im Themenbereich *Ganze Zahlen*
- hookesches Gesetz in den Themenbereichen *Proportionale Zuordnungen* sowie *Quadratische Funktionen*
- astronomische Zusammenhänge (Planetenumfang, Erdumlaufbahn usw.) im Themenbereich *Kreise*
- freier Fall, Flugkurve eines Balls usw. in den Themenbereichen *Quadratische Funktionen* sowie *Ableitungen*
- geometrische Optik (Lochkamera, Sammellinse, Schattenwurf usw.) im Themenbereich *Strahlensätze*
- Luftdruck und Höhe im Themenbereich *Potenzen*
- radioaktiver Zerfall und Abschirmung von Röntgenstrahlung in den Themenbereichen *Wachstums- und Zerfallsprozesse* sowie *Exponentialfunktionen*
- Faden- und Federpendel im Themenbereich *Trigonometrie*
- Geschwindigkeit und Beschleunigung in den Themenbereichen *Ableitung* sowie *Vektoren*
- Kraft im Themenbereich *Vektoren*

Die Auswahl basiert auf der Schulbuchanalyse mehrerer Lehrbuchreihen.

### Klassische und neue Inhalte aus der Physik im Mathematikunterricht

Beschreibungen von Naturphänomenen in der Physik gelten als klassische Anwendungen der Mathematik.

Einsatz ausgewählter Inhalte der Physik für den Mathematikunterricht gefordert, wie etwa Anfang des 20. Jahrhunderts von Felix Klein (Klein 1933[4]). Es gibt eine Vielzahl an physikalischen Themen, die sich mittlerweile als „Klassiker“ insbesondere zum Üben und Anwenden mathematischen Wissens in Mathematikschulbüchern finden (vgl. **Kasten 1**). Daneben gibt es weitere kreative Möglichkeiten, wie sich auch moderne physikalische Inhalte einbinden lassen und wie daran spannende Mathefragen aufgeworfen werden können, die neben der Anwendung auch die (Weiter-)Entwicklung mathematischer Begriffe unterstützen können.

Anhand zweier bekannter Beispiele beschreiben wir im Folgenden Potenziale und Herausforderungen für den Einsatz physikalischer Kontexte im Mathematikunterricht. Die Beispiele kann man jeweils aus zwei unterschiedlichen Perspektiven denken:

1. Physik als Aufhänger und Ausgangspunkt für mathematische Fragestellungen und Entwicklungen;
2. Physik als Anwendung zum beziehungsreichen Üben mathematischer Inhalte und Verfahren.

## Beispiel 1: Strahlensätze und geometrische Optik

Die ersten Ansätze der Strahlensätze sind vermutlich in einem physikalischen Zusammenhang entstanden, und zwar an dem konkreten Problem in der Antike, die Höhe von Pyramiden mithilfe des Schattenwurfes zu bestimmen (vgl. Gericke 1984). Heute sind sie klassischer Inhalt des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I.

Typische Aufgaben zur sogenannten *geometrischen Optik* in Mathematikbüchern beziehen sich auf diesen Bereich und behandeln neben Schattenwürfen beispielsweise auch Lochkameras. Die zugehörigen Überlegungen werden dabei auf optische Linsen erweitert. Diese, meist auf theoretischer Ebene angesetzten und häufig durch Illustrationen angereicherten Aufgaben können sinnvoll durch enaktive und entschleunigende Zugänge im Rahmen leicht zu realisierender Experimente ergänzt werden. Lernende können dabei zunächst eigene Hypothesen über die physikalischen Zusammenhänge entwickeln oder die Adäquatheit des mithilfe der Strahlensätze aufgestellten Modells zur Beschreibung der Phänomene beurteilen. Hier können sie „Hands-on“ erleben, dass mathematische Sätze geeignet sind, die Welt um uns präzise zu beschreiben.

Besonders einfach und auch im Mathefachraum realisierbar sind Entdeckungen an der Lochkamera. Diese kann man aus leicht verfügbaren Materialien innerhalb von ca. 10 Minuten nachbauen. Und das geht so:

**Abb. 1**: Fertige Lochkamera von verschiedenen Seiten fotografiert

**Bau einer Lochkamera**

1. Setze eine Klopapierrolle auf ein Stück Butterbrotpapier oder Transparentpapier und übertrage mit einem Bleistift den kreisförmigen Umriss. Male zusätzlich Zacken an den Kreis und schneide die Figur aus.
2. Positioniere den Kreis mit den Zacken an eine Seite der Klopapierrolle und fixiere ihn mit einem Gummiband. (siehe **Abb. 1** links)
3. Schneide ein Stück Alufolie ab und befestige diese mit einem Gummiband an der anderen Seite der Klopapierrolle. Steche ein kleines Loch in die Mitte der Alufolie. (siehe **Abb. 1** rechts)

**Mathematischer und physikalischer Hintergrund**

Eine Lochkamera stellt eine besonders einfache Form einer Kamera dar, die ganz ohne Linsen auskommt. Stattdessen wird ein kleines Loch (Loch in der Alufolie) genutzt, durch welches das Licht in einen ansonsten möglichst lichtundurchlässigen Hohlkörper (Klopapierrolle) fällt. Die Lichtstrahlen ergeben auf der Rückseite des Hohlkörpers (auf dem Transparentpapier) ein seitenverkehrtes und auf dem Kopf stehendes Bild. Eine schematische Skizze einer Lochkamera ist in **Abb. 2** zu sehen. An der Skizze lässt sich erkennen, dass Objekte in der Lochkamera je nach Abstand der betrachteten Objekte maßstäblich verkleinert (oder unter Umständen auch vergrößert) dargestellt werden. Das Verhältnis von Objektgröße G und Bildgröße B lässt sich mit der sogenannten Abbildungsgleichung in Beziehung zum den Abständen g und b zwischen Objekt

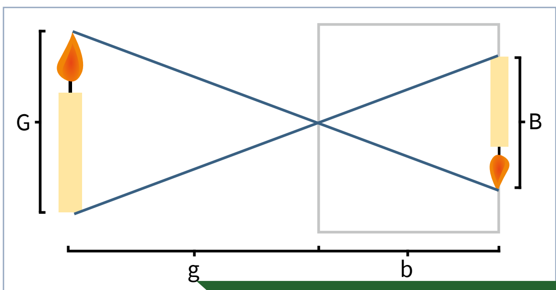


**Abb. 2**: Skizze zur Funktionsweise einer Lochkamera

**FREDERIK DILLING, SIMON F. KRAUS**

# Unser Sonnensystem maßstäblich begreifen

## Größen in der Astronomie

|  |  |
|---|---|
| **LERNGRUPPE:** | ab 5. Klasse |
| **IDEE:** | Maßstäbe in der Astronomie |
| **ARBEITSBLATT 1:** | Rechnen mit Größen (Klasse 5/6) |
| **ARBEITSBLATT 2:** | Logarithmische Skala (ab Klasse 10) |
| **ZEITBEDARF:** | 3 – 4 Unterrichtsstunden |

**Abb. 1**: Outdoor-Planetenmodell in der Stadt Siegen mit maßstäblichen Metallkugeln



Maßstäbe geben das Verhältnis zwischen einer abgebildeten Größe und einer realen Größe an. Es handelt sich hierbei um ein Thema, das am Ende der Grundschule sowie zu Beginn der Sekundarstufe I einen festen Bestandteil des Mathematikunterrichts darstellt. Typische Alltagsbeispiele, die dort aufgegriffen werden, sind meist der Modellbau oder die Kartografie.

Ein Wissenschaftsgebiet, das sich zwangsläufig mit Maßstäben beschäftigt, ist die Astronomie. Hier wird mit enorm großen Werten, beispielsweise in Bezug auf Längen- oder Zeitangaben umgegangen, sodass grafische Darstellungen nur durch Verkleinern möglich sind.

### Planetendurchmesser und Abstände im Sonnensystem

In der Astronomie betrachtet man im Vergleich zu anderen Wissenschaften meist sehr große Zahlenwerte. Beispielsweise beträgt der Durchmesser der Erde ungefähr 12 756 km, der mittlere Abstand zur Sonne sogar $150 \cdot 10^6$ km. Diese schier unglaublichen Entfernungen machen das Arbeiten mit Maßstäben unumgänglich und bieten im Mathematikunterricht einen authentischen Anwendungskontext.

In Lernprozessen des Astronomieunterrichts spielen gegenständliche Modelle eine wesentliche Rolle. Die Astronomie kann sich in vielen Fällen, anders als sonst in der Physik üblich, nicht auf systematische und standardisierte Experimente stützen, sondern baut stattdessen auf Beobachtungen und Modellierungen auf. Physische Modelle dienen im Unterricht dem handlungsorientierten Aufbau grundlegender Vorstellungen und werden regelmäßig eingesetzt. Besonders bekannt sind Modelle, die die Bewegungen von Sonne, Erde und Mond oder der acht Planeten um die Sonne beschreiben. Bei diesen wohl in fast jeder schulischen Physiksammlung zu findenden Modellen handelt es sich tatsächlich nicht um maßstäbliche Modelle – und dies aus gutem Grund: Bereits in vergleichsweise lokalen Gebieten wie unserem Sonnensystem unterscheiden sich die Durchmesser zueinander um Faktoren von etwa 28, die Abstände sogar um einen Faktor von etwa 74. Diese enormen Unterschiede sind in solchen Modellen nicht darstellbar. In sogenannten Outdoor-Planetenmodellen wie in **Abb. 1** werden diese Beziehungen aber bewusst aufgegriffen. Meist wird die Sonne durch eine große Kugel modelliert, die anderen Planeten sind im passenden Maßstab dargestellt. Bei Planetenwanderpfaden werden zudem die Abstände der Planeten zueinander maßstabsgetreu wiedergegeben.

Name: Datum:



# Durchmesser und Abstände in unserem Sonnensystem

*Die folgende Tabelle gibt die Durchmesser der acht Planeten unseres Sonnensystems sowie ihre mittleren Abstände zur Sonne an.*

| Planet | Merkur | Venus | Erde | Mars | Jupiter | Saturn | Uranus | Neptun |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Durchmesser in km | 4 879 | 12 104 | 12 756 | 6 792 | 142 984 | 120 536 | 51 118 | 49 528 |
| Entfernung zur Sonne in Mio. km | 58 | 108 | 150 | 228 | 779 | 1 433 | 2 872 | 4 495 |

**1. Aufgabe**

Erstelle maßstäbliche Modelle der acht Planeten unseres Sonnensystems. Suche hierzu runde Gegenstände (z. B. einen Fußball) oder Lebensmittel (z. B. einen Apfel) in der passenden Größe heraus:

a) Wie groß müssen die einzelnen Modelle sein, damit du passende Objekte findest? (*Tipp*: Verwende ein Tabellenkalkulationsprogramm für deine Berechnungen)
b) In welchem Maßstab stehen dann jeweils die Modelle und die Planeten?
c) Welchen Durchmesser hätte ein Modell der Sonne im gleichen Maßstab? (Durchmesser der Sonne: 1 392 700 km)
d) Verwende einen Sitzball als Modell für die Sonne. Wie groß müssen die Durchmesser der einzelnen Planetenmodelle nun gewählt werden? Gibt es auch hierfür passende Objekte oder Lebensmittel?

**2. Aufgabe**

Informiert euch im Internet über Planetenwanderwege. Was kann man bei diesen zusätzlich zu den selbst erstellten Modellen für die einzelnen Planeten entdecken?
Wir bauen nun unseren eigenen kleinen Planetenweg mit euren Gegenständen und Lebensmitteln:

a) Bestimme die entsprechend deines Modells maßstäblich verkürzten Entfernungen der Planeten zur Sonne.
b) Stellt euch auf den Schulhof oder den Sportplatz und teilt die Modellplaneten einzelnen Personen zu. Nehmt den zuvor berechneten maßstäblich verkleinerten Abstand zueinander ein. Was fällt euch auf?
c) Wie klein müssten die einzelnen Planetenmodelle sein, wenn ihr euch ausschließlich im Klassenraum verteilen würdet?

**Interessante Größenvergleiche findest du hier:**
https://www.femibaby.de/schwangerschaft/baby-groesse/
https://chirurgie-stachus.de/was-nuesse-gemuese-obst-muenzen-und-sportbaelle-gemeinsam-haben-chirurgische-groessenvergleiche/

KATHRIN HOLTEN, JULIAN PLACK UND INGO WITZKE

# Mit der Holzeisenbahn zu Funktionen

## Bewegungsvorgänge mathematisch beschreiben

| | |
|---|---|
| **LERNGRUPPE:** | 8. Klasse |
| **IDEE:** | Mathematische Beschreibung von Bewegungsvorgängen in einer explorativen Lernumgebung mit Holzspielzeug |
| **ARBEITSBLATT:** | Bewegungsvorgänge mathematisch beschreiben |
| **WEITERES MATERIAL:** | Holzeisenbahn (Lok und Waggon) mit Schienen (ca. 100 €), Maßbänder und Regalböden; Tablet/Smartphone mit Videofunktion und Stoppuhr |
| **ZEITBEDARF:** | 3 Unterrichtsstunden |

„Klar kommt da eine Gerade raus, die Bahn fährt doch gleichmäßig!“, entgegnet Theresa in der Gruppenarbeitsphase auf eine Nachfrage der Lehrkraft. Auch wenn sie hier nicht die präzisen physikalischen Begriffe verwendet, bettet Theresa ihr Experiment in die theoretische Annahme ein, die batteriebetriebene Lokomotive bewege sich gleichförmig, d. h. mit konstanter Geschwindigkeit. Für sie ist es daher evident, dass die aufgenommenen Messpunkte ($s(t) \mid t$) – mit s(t) als zurückgelegtem Weg nach der Zeit t – im Koordinatensystem auf einer Geraden liegen.

Die vorgestellte Lernumgebung ermöglicht anhand der Beschreibung verschiedener Bewegungsvorgänge einer batteriebetrieben Holzeisenbahn zu den Leitideen Messen und funktionaler Zusammenhang insbesondere die erste wintersche Grunderfahrung (Winter 1995). Dabei werden Anlässe geschaffen, die den Aspekt des Änderungsverhaltens funktionaler Zusammenhänge (Vollrath 1989) auf spielerische Art und Weise in den Vordergrund rücken.

### Die Lernumgebung

Zunächst werden die Arbeitsaufträge zu verschiedenen Messanordnungen beschrieben, vor dem Hintergrund der intendierten Lernziele mathematikdidaktisch eingeordnet und schließlich physikalisch erklärt. Der physikalische Hintergrund ist Thema des Physikunterrichts der Sekundarstufe II.

Die Lernenden sollten zudem im Unterricht auf Smartphones oder Tablets mit Stoppuhr- und Videofunktion zur Aufnahme der Messwerte zurückgreifen. Die Dokumentation der Messung kann natürlich auch mit Stift und Papier erfolgen, jedoch motiviert die Arbeit mit digitalen Medien und die Lernenden können auf ein innerhalb ihrer Gruppe gemeinsam genutztes Dokument zugreifen, hierin ihre Messwerte speichern, Diagramme erstellen und die Ergebnisse als digitales Poster aufbereiten. Die Lernumgebung eignet sich damit auch, um analog zu Projektseiten in manchen Schulbüchern (vgl. etwa Lambacher Schweizer 8, S. 72–73), die Verwendung von Tabellenkalkulationsprogrammen einzuüben. Sie können direkt in einem solchen Programm Messwerttabellen anlegen und Graphen erstellen und die Funktionsgleichung der Ausgleichsgeraden bestimmen lassen. Auf diese Weise kann die Kompetenz 1.2 Digitale Werkzeuge (Medienkompetenzrahmen NRW) gefördert werden. Insgesamt benötigt der Aufbau der Messanordnungen viel Platz, es eignet sich jedoch in der Regel ein Klassenraum mit Gruppentischen. Unsere Lerngruppen nutzten zusätzlich den Fußboden; im Sommer kann auf den Schulhof ausgewichen werden.

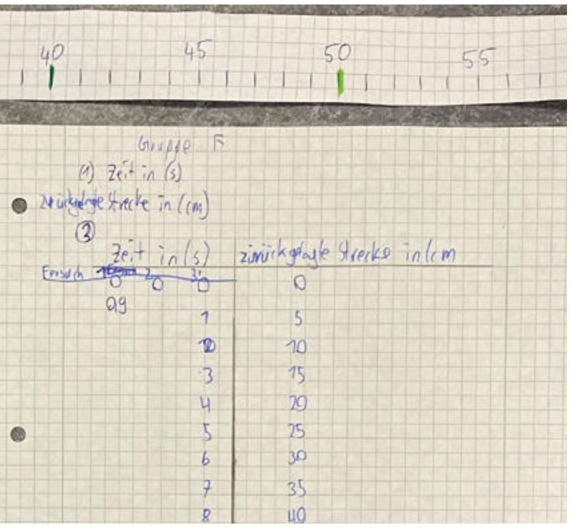


**Abb. 1**: Maßband und Tabelle mit Messpunkten.

## Anleitung

Im Aufbau aller im Folgenden vorgeschlagenen Messanordnungen ist zur Streckenmessung ein Maßband entlang der Fahrstrecke auszulegen. Aufgabe der Lernenden ist es, beim Passieren der Lok und mittels frei wählbarer Streckenmarkierungen die Zeit zu messen, die die Lok benötigt, um die jeweilige Streckenmarkierung aus dem Stand heraus (beschleunigte Bewegung auf der geneigten Ebene) oder vom fliegenden Start aus (gleichförmige Bewegung und Abbremsvorgang) zu erreichen. Die Lernenden „nutzen [dabei] das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längenmessung, [...] auch in Naturwissenschaften [...]“, und sie „wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus“ (KMK 2004, S. 10). Die gemessenen Zeiten und die abgelesenen Strecken sind in einer Tabelle (vgl. **Abb. 1**) zu notieren, um anschließend ein Weg-Zeit-Diagramm der Bewegungen zu skizzieren (vgl. **Abb. 2**). Bei dieser Tätigkeit wenden sie „verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen“ an und sie erkennen „Beziehungen zwischen Darstellungsformen“ (KMK 2004, S. 8). Die Entdeckungen werden mittels Kurzpräsentation in Form eines Posters vorgestellt. Bei der Erstellung eines digitalen Präsentationsmediums wird zudem die Medienkompetenz 4.1 Medienproduktion und Präsentation (Medienkompetenzrahmen NRW) gefördert.

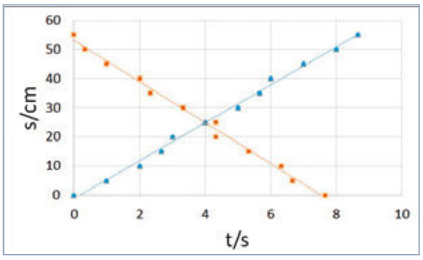


**Abb. 2**: Weg-Zeit-Diagramm der gleichförmigen Bewegung der Lokomotive, Rückwärtsfahrt (orange) und Vorwärtsfahrt (blau)

Die Messanordnungen sind so kombiniert, dass die Gruppenarbeitsaufträge verschiedenen Anforderungsbereichen (KMK 2004) genügen und im Sinne einer inneren Differenzierung in heterogenen Lerngruppen eingesetzt werden können.

## Die gleichförmige Bewegung einer Lokomotive

Die erste Messreihe führen alle Gruppen durch. Die Lernenden sollen über die gleichförmige Bewegung der batteriebetriebenen Eisenbahn (d. h., der Zug fährt annähernd mit konstanter Geschwindigkeit) Entdeckungen zu proportionalen Zuordnungen bzw. (Graphen von) linearen Funktionen machen. Die Hälfte der Schülergruppen lässt dafür den Zug vorwärts fahren, die andere Hälfte rückwärts (**Arbeitsblatt 1**).

Wichtig: Die batteriebetriebenen Lokomotiven sollen eine solch geringe Höchstgeschwindigkeit aufweisen, dass die Schülerinnen und Schüler mit bloßem Auge das Passieren von Streckenmarkierungen erkennen können. Eine Zeitmessung ist dann über die Funktion „Rundenzeiten“ einer Stoppuhr möglich. Die Lernenden stoppen jeweils eine Runde, wenn der Zug eine der Streckenmarkierungen passiert. Nach der Messung müssen die Zeiten den richtigen Streckenmarkierungen zugeordnet werden.

Eine andere Variante ist die Aufnahme eines Slow-Motion-Videos, das in einer Bild-für-Bild-Auswertung das Ablesen der Zeiten an bestimmten Positionen des Zuges aus den Videodaten ermöglicht. Ohne diese Slow-Motion-Funktion kann alternativ die laufende Stoppuhr eines Smart[...] aufgezeichnet werden. Im entstandenen Video kann dann die Zeit zu den festgelegten Streckenmarkierungen des Zuges auf dem mitgefilmten Bildschirm des Smartphones abgelesen werden. Nach unserer Erfahrung entwickeln die Schülerinnen und Schüler gemeinsam kreative Ideen, um die Messpunkte im gewünschten Rahmen aufzunehmen und zu dokumentieren (**Arbeitsblatt 1**, Aufgabe 2).

Die erhaltene Messreihe sollte zur Reduzierung von Messungenauigkeiten dreimal hintereinander durchgeführt werden und aus den ermittelten Messwerten sollte für jede Streckenmarkierung das arithmetische Mittel gebildet werden. Aus den aufgenommenen Messwerten resultiert bei sorgfältiger Arbeit annähernd der Graph einer linearen Funktion, der, je nach Vorwärts- oder Rückwärtsfahrt, eine positive oder negative Steigung aufweist, betraglich aber in etwa denselben Wert einnimmt.

Aus physikalischer Sicht lautet die Funktionsgleichung zur Strecke $s$ in Abhängigkeit von der Zeit $s(t)=vt$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v$ des Zuges und der Zeit $t$. Die Geschwindigkeit entspricht dem Betrag der Steigung in **Abb. 2** und hat dort die Einheit cm/s.

## Vergleich zweier Loks

Für das zweite Experiment (**Arbeitsblatt 2)** erhalten zwei der acht Gruppen eine zweite batteriebetriebene Lokomotive, die eine andere Geschwindigkeit aufweist als die Lok aus der ersten Messung. Der Versuchsaufbau gleicht ansonsten dem der ersten Messung. Auch hier besteht die Aufgabe in der Aufnahme von Messwerten, um daraus resultierend ein Weg-Zeit-Diagramm zu erstellen. Für einen direkten Vergleich bietet es sich an, den neu entstandenen Graphen in das erste Koordinatensystem mit einzutragen. Die Lernenden können darüber ins Gespräch kommen, dass der zweite Graph eine größere Steigung aufweist, also „steiler“ ist als der erste. Durch den Vergleich zweier Lokomotiven kann die Geschwindigkeit als Steigung eines Graphen erfahren und für den Mathematikunter[...]