Inhaltsverzeichnis

Körperberechnungen

Ähnlichkeit, Strahlensätze und Co.

Trigonometrie

Potenzen und Potenzfunktionen

Vorwort

Das Schönste, was entdeckendes Lernen im Unterricht bewirken kann, sind mathematische Aha-Erlebnisse. Das plötzliche Begreifen von etwas, was kurz vorher noch gedanklich undurchdringbar erschien, ruft in den Schülern[1] nicht nur Stolz auf die eigene Leistung hervor, sondern bildet darüber hinaus eine wichtige Grundlage für das Vertrauen in den eigenen Verstand und in die eigene Urteilsfähigkeit.

„Die schönste Mathematik ist die selbst entdeckte." – Diese Aussage von Prof. Dr. Henn (TU Dortmund) kann auch als Leitsatz für Autoren und Herausgeber der vorliegenden Veröffentlichung gelten. Wir möchten ihn gerne noch präzisieren durch *„Die beim Schüler **wirkungsvollste** Mathematik ist die selbst entdeckte"*, denn Inhalte, die den Schülern einfach nur „eingetrichtert" wurden, haben eine kurze Halbwertzeit und sind schon sehr bald nicht mehr abrufbar. Der amerikanische Psychologe Burrhus Frederic Skinner schreibt dazu: *„Bildung ist das, was überlebte, wenn das Gelernte vergessen wurde."* Auch im Hinblick auf einen **kompetenzorientierten Mathematikunterricht** und auf eine sinnvolle und gewinnbringende **Lebensvorbereitung** ist selbstentdeckendes Lernen unabdingbar, denn die Schüler entwickeln dabei selbst Strategien, erproben und verwerfen sie und suchen neue Lösungswege – Fähigkeiten, die in Alltag und Berufsleben unabdingbar sind.

Wie geht man als Mathematiklehrer jedoch damit um, wenn ein Schüler nicht weiß, wie er an ein neues Problem herangehen soll oder wenn seine Strategie so gar nicht zum Erfolg führen will? Jeder von uns kennt dies aus seiner tagtäglichen Arbeit. Wir haben im Unterricht hierzu sehr gute Erfahrungen mit dem sinnvollen Einsatz von Tippkarten gemacht.

Der **Aufbau** der Unterrichtshilfe ist klar und einfach:
Zu jeder **Aufgabenkarte** gibt es **mehrere Tippkarten**, die gestaffelte Hinweise zur Lösung der Aufgaben geben. Sie bieten Differenzierungsmöglichkeiten sowohl auf der quantitativen Ebene als auch auf der Erschließungsebene (handelnd, bildlich oder symbolisch). Die Schüler wählen individuell aus, wie viele Tippkarten sie benötigen, um zur Lösung zu gelangen – jeder arbeitet dabei in seinem eigenen Tempo.
Zu jeder Aufgabe gibt es jeweils eine **Lösungskarte** zur Selbstkontrolle.

Das übersichtliche **Layout der Karten** garantiert ein optimales Zurechtfinden:


Aufgabenkarte

Tippkarte 1

Tippkarte 2

Tippkarte 3

Tippkarte 4


Lösungskarte

Die Karten werden (idealerweise vergrößert) kopiert und ggf. laminiert; so können die Schüler ihre Lösung mit Folienstift darauf notieren. Die Tippkarten werden an einem fest vereinbarten Ort im Klassenzimmer abgelegt oder befinden sich in der Hand des Lehrers, der sie dann entsprechend einzeln ausgibt.

Folgende Hauptthemen mit allen wesentlichen Unterthemen der Klasse 10 werden abgedeckt:

- Körperberechnungen
- Ähnlichkeit, Strahlensätze und Co.
- Trigonometrie
- Potenzen und Potenzfunktionen

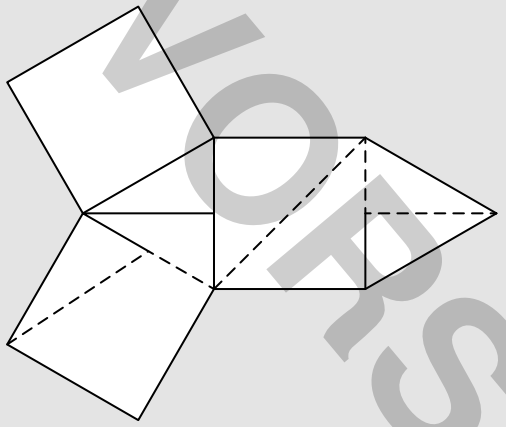
Viel Erfolg beim Einsatz der Materialien wünschen Herausgeber und Autoren

[1] Aufgrund der Zeugnis-Lesbarkeit ist in diesem Buch mit Schüler auch immer Schü
Lehrerin etc.

Streckenzug im Dreiecksprisma

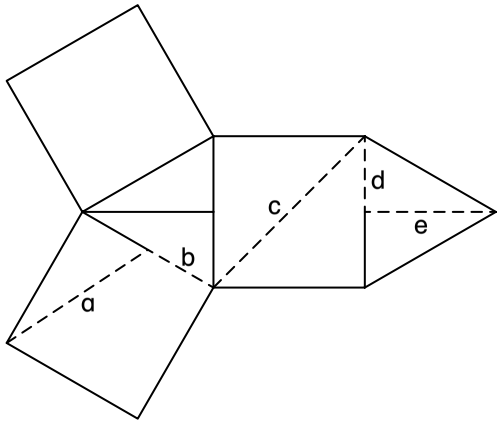
Alle Kanten des Prismas sind 8 cm lang.

Berechne die Länge des gestrichelt eingezeichneten Streckenzuges.



1 Streckenzug im Dreiecksprisma

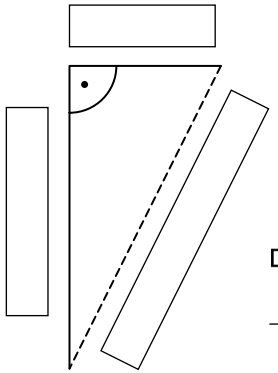
Unterteile den Streckenzug zunächst in die Einzelstrecken a, b, c, d, e.



2 Streckenzug im Dreiecksprisma

Wie lang ist die Seite a? Erinnere dich an den Satz des Pythagoras.

Beschrifte das rechtwinklige Dreieck. Wo befinden sich die **Katheten**, und die **Hypotenuse**?

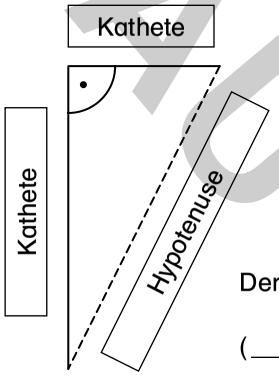


Die Hypotenuse liegt immer

_____ vom rechten Winkel.

3 Streckenzug im Dreiecksprisma

Die Hypotenuse liegt immer **gegenüber** vom rechten Winkel.



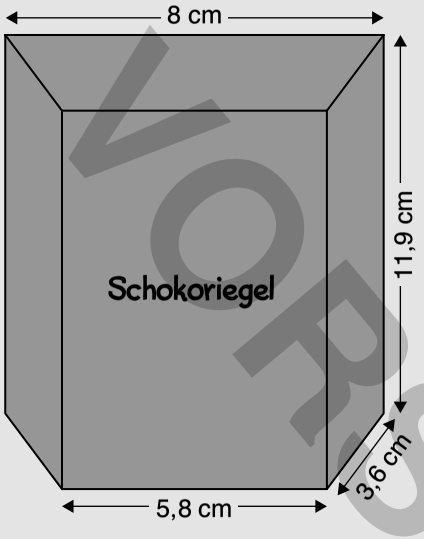
Der Satz des Pythagoras lautet:

(_____)² = (_____)² + (_____)²

Oberfläche eines Trapezprismas

Die abgebildete Verpackung von Schokoriegeln hat die Form eines Trapezprismas.

Berechne, wie viel cm² Pappe zur Herstellung der abgebildeten Verpackung benötigt werden.



1 Oberfläche eines Trapezprismas

Um die Menge der benötigten Pappe zu berechnen, musst du die **Oberfläche** des Prismas berechnen.

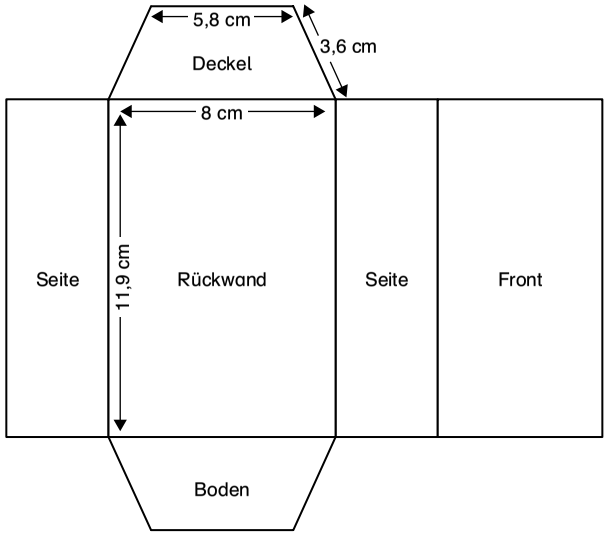
Aus welchen Teilflächen setzt sich die Oberfläche zusammen?

Zeichne ein Netz des Körpers, um die einzelnen Flächen besser erkennen zu können.

2 Oberfläche eines Trapezprismas

Hier siehst du das Netz des Körpers.

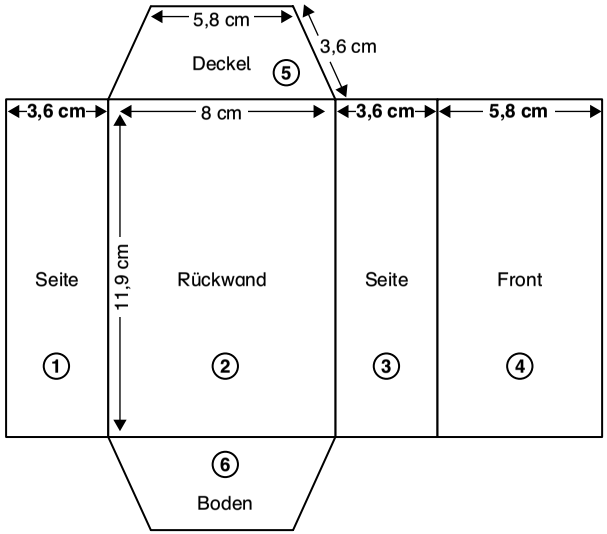
Um welche Arten von Flächen handelt es sich jeweils? Trage die restlichen bekannten Maße in der Aufgabenkarte ein.



3 Oberfläche eines Trapezprismas

Die Oberfläche besteht aus 6 Teilflächen:

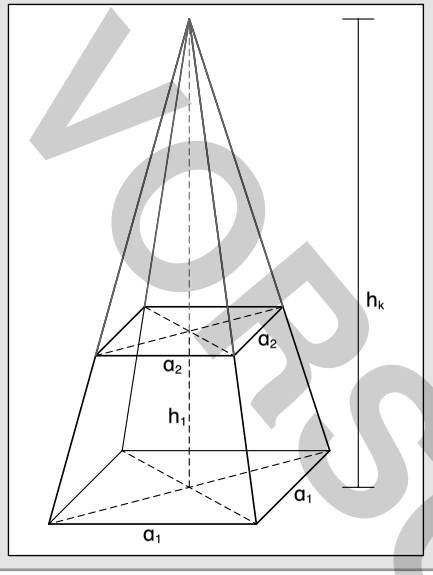
- 4 Rechtecke (Rechteck ① und ③ sind flächengleich)
- 2 flächengleiche Trapeze



Volumen eines Pyramidenstumpfes

Ein quadratischer Pyramidenstumpf hat die Höhe $h_1 = 5$ cm. Die Gesamthöhe der Pyramide beträgt $h_k = 15$ cm. Die große Grundkante a_1 ist 9 cm lang, die kleine Grundkante a_2 ist 6 cm lang.

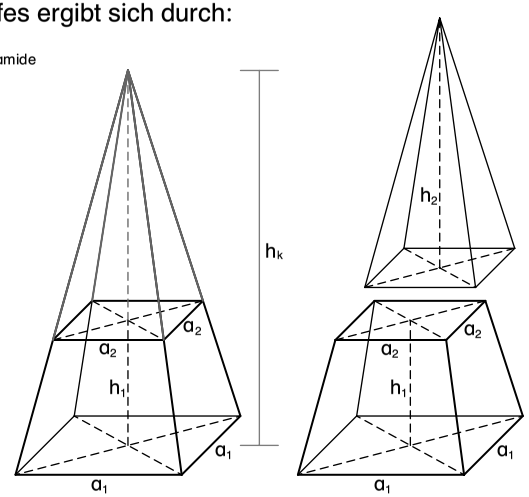
Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfes.



1 Volumen eines Pyramidenstumpfes

Das Volumen des Pyramidenstumpfes ergibt sich durch:

$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = V_{\text{Große Pyramide}} - V_{\text{Kleine Pyramide}}$



Volumen eines Pyramidenstumpfes

$_{\text{oße Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_k = \frac{1}{3} \cdot (9\text{ cm})^2 \cdot 15\text{ cm} = 405\text{ cm}^3$

$_{\text{eine Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot (6\text{ cm})^2 \cdot 10\text{ cm} = 120\text{ cm}^3$

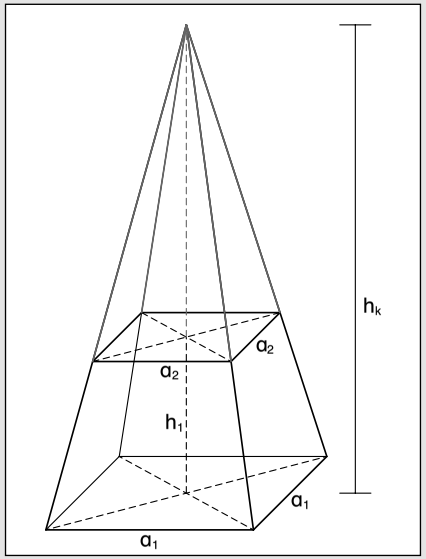
$_{\text{ramidenstumpf}} = 405\text{ cm}^3 - 120\text{ cm}^3 = 285\text{ cm}^3$

s Volumen des Pyramidenstumpfes beträgt 285 cm³.

Oberfläche eines Pyramidenstumpfes

Ein quadratischer Pyramidenstumpf hat die Höhe $h_1 = 5$ cm. Die Gesamthöhe der Pyramide beträgt $h_k = 15$ cm. Die große Grundkante a_1 ist 9 cm lang, die kleine Grundkante a_2 ist 6 cm lang.

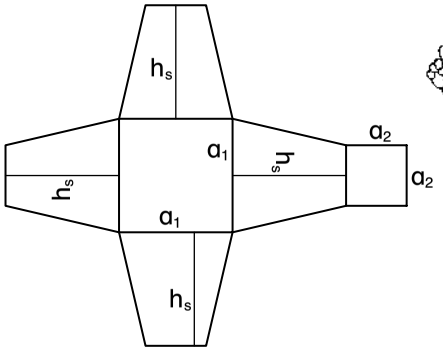
Berechne die Oberfläche des Pyramidenstumpfes.

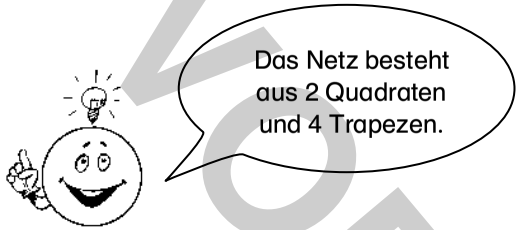


1 Oberfläche eines Pyramidenstumpfes

Um die Oberfläche zu berechnen, benötigst du die einzelnen Teilflächen des Pyramidenstumpfes.

Netz des Pyramidenstumpfes:



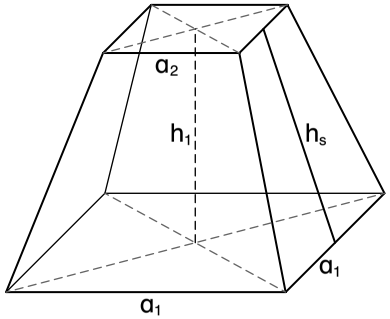


2 Oberfläche eines Pyramidenstumpfes

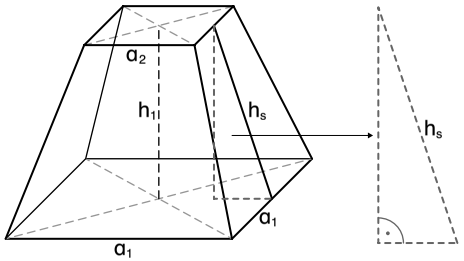
Erinnere dich an die Flächenformel für das Trapez.

$V_{Trapez} = \frac{(a_1 + a_2)}{2} \cdot h_s$

Suche dir ein rechtwinkliges Dreieck, mit dessen Hilfe du h_s berechnen kannst.



3 Oberfläche eines Pyramidenstumpfes



Der Pythagoras für das eingezeichnete Dreieck lautet:

$h_s^2 = (\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_)^2$

Zur Selbstkontrolle: $h_s = 5{,}22$ cm

Oberfläche eines Pyramidenstumpfes

Berechnung der Oberfläche des Pyramidenstumpfes:

O = 4 · Fläche Trapez + Grundfläche + Deckfläche

Die Höhe h_s des Trapezes berechnet sich wie folgt:

$h_s^2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + h_1^2 = \left(\frac{9\text{ cm} - 6\text{ cm}}{2}\right)^2 + (5\text{ cm})^2 = (1{,}5\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 = 27{,}25\text{ cm}^2$

$h_s \approx 5{,}22$ cm

$O = 4 \cdot \left(\frac{(9\text{ cm} + 6\text{ cm})}{2} \cdot 5{,}22\text{ cm}\right) + (9\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2 = 273{,}6\text{ cm}^2$

Die Oberfläche beträgt 273,6 cm².

Oberfläche eines zusammengesetzten Körpers

$$O_{Halbkegel} = \left(\frac{1}{2} \cdot (\pi \cdot 32\text{ cm} \cdot 42{,}2\text{ cm})\right) + \frac{64\text{ cm} \cdot 27{,}5\text{ cm}}{2} \approx 3\,001\text{ cm}^2$$

$$O_{Halbzylinder} = \left(\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 32\text{ cm} \cdot 15\text{ cm})\right) + 64\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} \approx 2\,468\text{ cm}^2$$

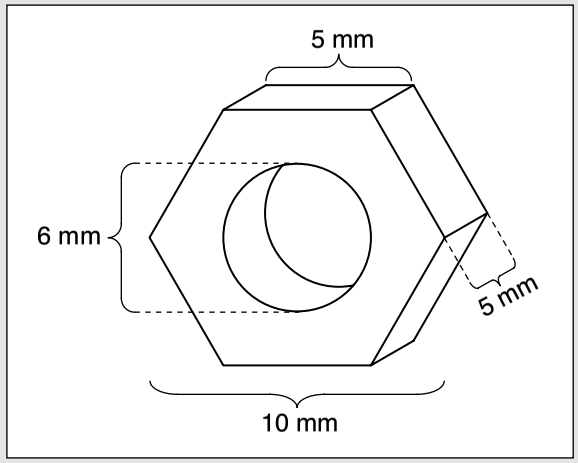
$$O_{Halbkugel} = \left(\frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \pi \cdot (32\text{ cm})^2)\right) + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (32\text{ cm})^2 \approx 8\,042\text{ cm}^2$$

$$O_{Körper} = 3\,001\text{ cm}^2 + 2\,468\text{ cm}^2 + 8\,042\text{ cm}^2 \approx 13\,511\text{ cm}^2$$

Volumen eines ausgehöhlten Körpers

Eine Sechskantmutter hat die in der Zeichnung angegebenen Maße.

Berechne das Volumen der Sechskantmutter.

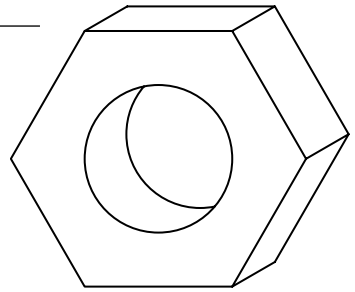


1 Volumen eines ausgehöhlten Körpers

der Mutter handelt es sich um ein Sechskantprisma mit gleich langen Kanten, aus m ein Zylinder ausgebohrt wurde.

s Volumen berechnet sich also aus:

tter = _____

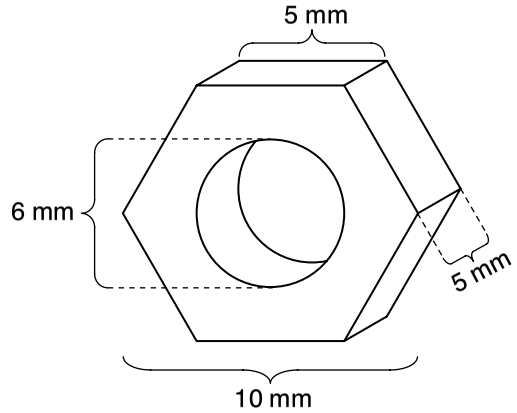


2 Volumen eines ausgehöhlten Körpers

Das Volumen berechnet sich folgendermaßen:

$V_{Mutter} = V_{Sechskantprisma} - V_{Zylinder}$

Notiere die Formeln und setze die gegebenen Größen ein.

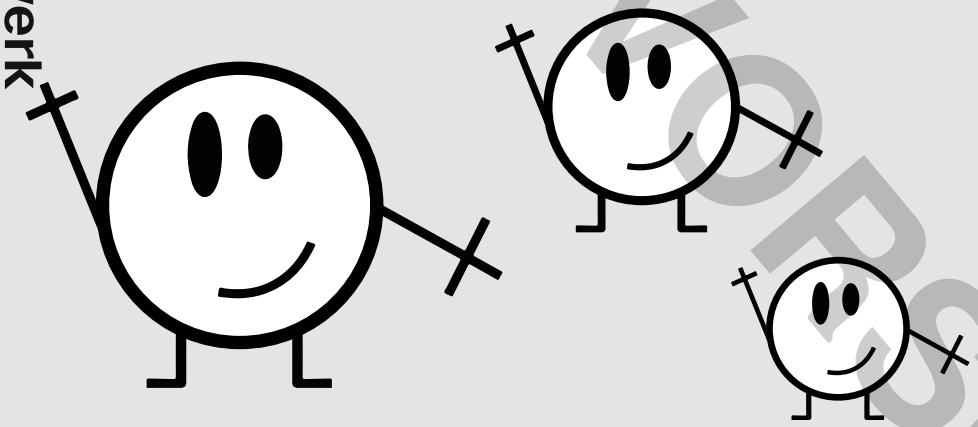


$V_{Sechskantprisma}$ = _____

$V_{Zylinder}$ = _____

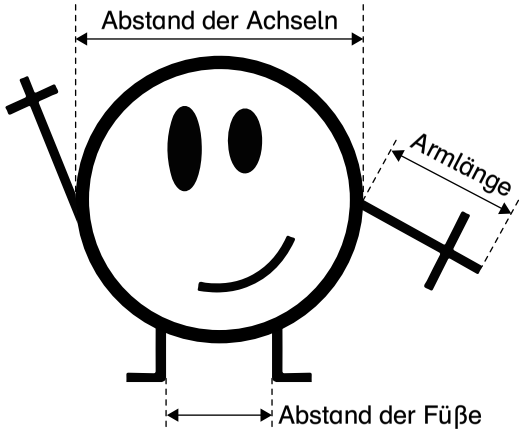
Ähnlichkeiten entdecken I

Was haben die Strichmännchen gemeinsam? Worin unterscheiden sie sich? Vergleiche entsprechende Längen zwischen den Figuren.



1 Ähnlichkeiten entdecken I

Miss zum Beispiel jeweils folgende Größen und vergleiche sie mit den entsprechenden Längen der anderen Figuren:



2 Ähnlichkeiten entdecken I

e Längen beim kleinsten Männchen sind gut halb so groß wie die entsprechenden ngen beim großen Männchen.

m Beispiel gilt für die Abstände der Füße:

$$\frac{\text{stand der Füße kleines Männchen}}{\text{stand der Füße großes Männchen}} = \frac{0{,}7\text{ cm}}{1{,}4\text{ cm}} = \frac{1}{2}$$

e sieht das beim Vergleich vom großen mit dem mittleren Männchen aus?

3 Ähnlichkeiten entdecken I

Berechne und vergleiche die Verhältnisse:

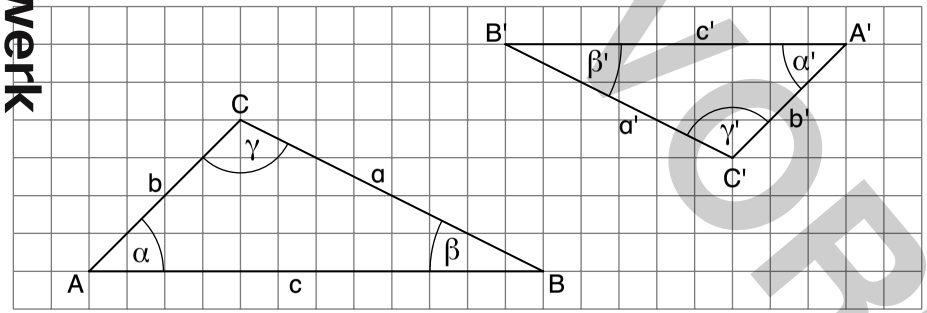
$$\frac{\text{Armlänge großes Männchen}}{\text{Armlänge mittleres Männchen}} = ?$$

$$\frac{\text{Abstand der Füße großes Männchen}}{\text{Abstand der Füße mittleres Männchen}} = ?$$

$$\frac{\text{Abstand der Achseln großes Männchen}}{\text{Abstand der Achseln mittleres Männchen}} = ?$$

2 Ähnlichkeiten entdecken II

So sollte es jetzt aussehen:



Miss die Winkel und Seitenlängen beider Dreiecke und berechne die Seitenverhältnisse, z. B.: $\frac{a'}{a} = ?$ $\frac{b'}{b} = ?$ $\frac{c'}{c} = ?$

3 Ähnlichkeiten entdecken II

$a \approx 4{,}5$ cm $b \approx 2{,}8$ cm $c \approx 6$ cm

$a' \approx 3{,}35$ cm $b' \approx 2{,}1$ cm $c' \approx 4{,}5$ cm

$\frac{a'}{a} = \frac{3{,}35\text{ cm}}{4{,}5\text{ cm}} \approx 0{,}74$ $\frac{b'}{b} = \frac{2{,}1\text{ cm}}{2{,}8\text{ cm}} \approx 0{,}75$ $\frac{c'}{c} = \frac{4{,}5\text{ cm}}{6\text{ cm}} \approx 0{,}75$

Was fällt dir auf, wenn du die Seitenverhältnisse und Winkel betrachtest? Beachte, dass gemessene Größen etwas ungenau sein können.

$\alpha = 45°$ $\beta = 27°$ $\gamma = 108°$ $\alpha' = 45°$ $\beta' = 27°$ $\gamma' = 108°$

Ähnlichkeiten entdecken II

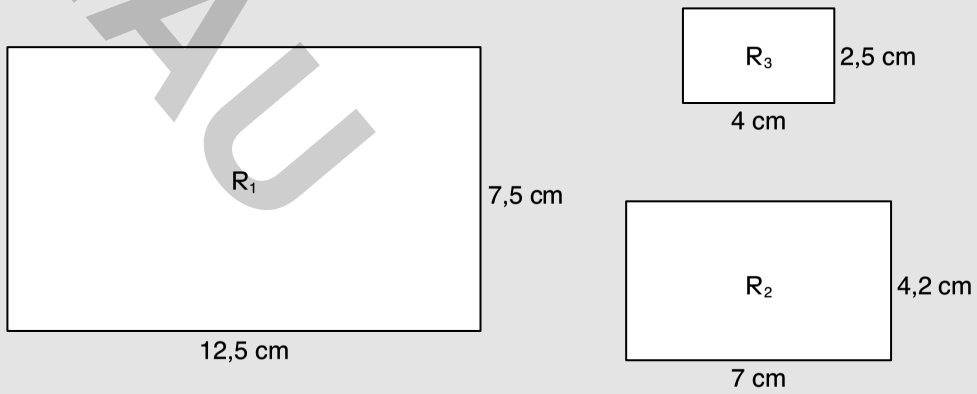
de Dreiecke haben dieselbe Form. Sie unterscheiden sich lediglich in ihrer Größe d in ihrer Lage.

de Dreiecke stimmen in den Verhältnissen ihrer Seiten überein. Ebenso sind entechende Winkel gleich groß.

rke: Zwei geometrische Figuren, die dieselbe Form haben – d. h. wenn sie in ihren sprechenden Winkeln und in ihren Seitenverhältnissen übereinstimmen – nennt n **ähnlich zueinander**. Auf die Größe und die Lage der Figuren kommt es dabei nt an.

Ähnliche Rechtecke

Die drei Rechtecke scheinen ähnlich zueinander zu sein.
Täuscht das Augenmaß?



1 Ähnliche Dreiecke

zu a): Vergleiche die Seitenlängen a' und a miteinander.

$\frac{a'}{a} =$

Um welchen Faktor ist a' größer als a?

Berechne nun b' und c' mithilfe dieses Faktors.

2 Ähnliche Dreiecke

zu a): Es ist $\frac{a'}{a} = \frac{10{,}5\text{ cm}}{7\text{ cm}} = \frac{3\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 1{,}5$, also $a' = 1{,}5 \cdot a$

Weil bei ähnlichen Dreiecken alle Seitenverhältnisse gleich sind, kannst du jetzt die anderen Seiten von A'B'C' berechnen:

$b' = 1{,}5 \cdot b =$ _____ und $c' = 1{,}5 \cdot c =$ _____

zu b): Alle Seitenlängen sind nun bekannt. Nun kannst du jeweils den Umfang der beiden Dreiecke berechnen.

Ähnliche Dreiecke

a): $\frac{a'}{a} = \frac{10{,}5\text{ cm}}{7\text{ cm}} = \frac{3\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 1{,}5$

Die fehlenden Seiten von A'B'C' sind:

$b' = 1{,}5 \cdot 6\text{ cm} = 9\text{ cm}$ und $c' = 1{,}5 \cdot 4\text{ cm} = 6\text{ cm}$

b): Umfang von ABC: $U = 7\text{ cm} + 6\text{ cm} + 4\text{ cm} = 17\text{ cm}$

Umfang von A'B'C': $U' = 10{,}5\text{ cm} + 9\text{ cm} + 6\text{ cm} = 25{,}5\text{ cm} = \mathbf{1{,}5} \cdot 17\text{ cm}$

Der Umfang von A'B'C' ist ebenfalls 1,5-mal größer als der Umfang von ABC.

Umfang bei ähnlichen Dreiecken

Das Dreieck ABC hat die Seiten a = 8 cm, b = 4 cm und c = 6 cm.

Das zu ABC ähnliche Dreieck A'B'C' hat den Umfang U' = 24 cm.

Berechne die Seitenlängen des Dreiecks A'B'C'.

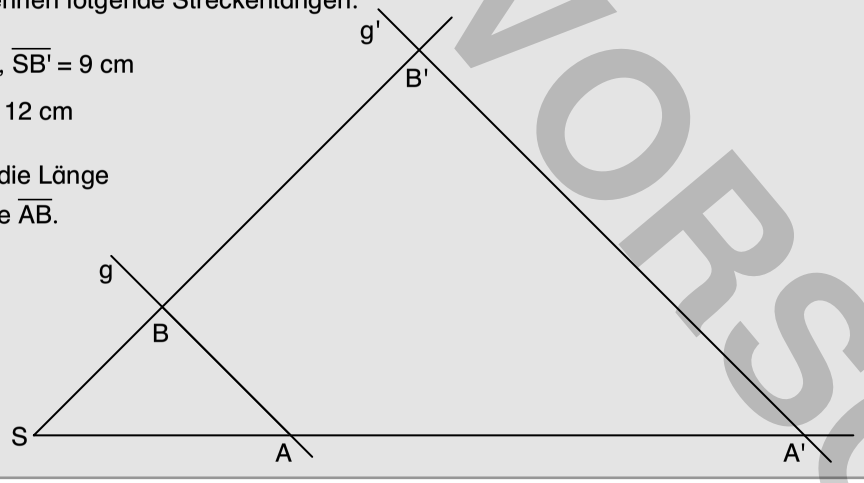
Der zweite Strahlensatz

Vom Punkt S gehen 2 Geraden aus. Sie werden von 2 parallelen Geraden geschnitten. Wir kennen folgende Streckenlängen:

$\overline{SB}$ = 3 cm, $\overline{SB'}$ = 9 cm

und $\overline{A'B'}$ = 12 cm

Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.



1 Der zweite Strahlensatz

Fertige eine maßstabsgetreue Zeichnung in deinem Heft an. Achte besonders darauf, dass g und g' parallel sind!

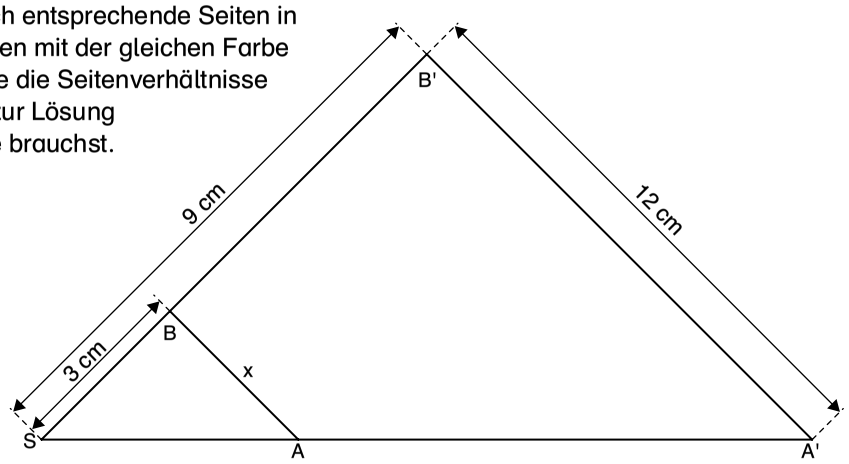
Beschrifte die bekannten Längen und kennzeichne die gesuchte Länge.

Welche Beziehung besteht zwischen den Dreiecken SAB und SA'B'?

2 Der zweite Strahlensatz

Die Dreiecke SAB und SA'B' sind ähnlich zueinander.

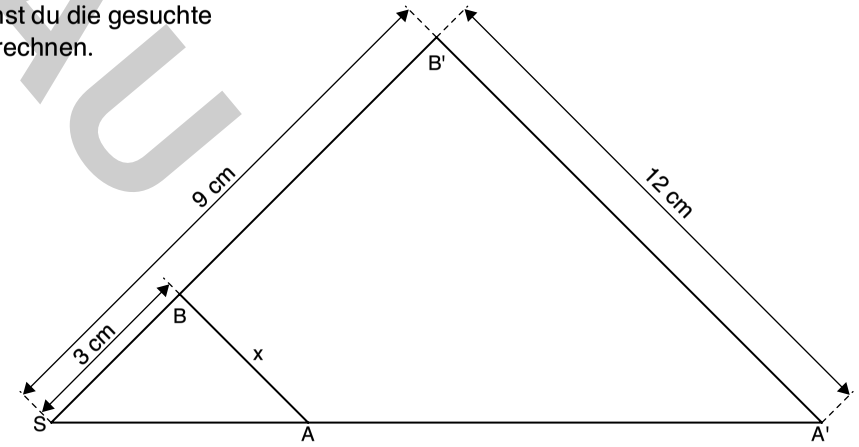
Markiere sich entsprechende Seiten in den Dreiecken mit der gleichen Farbe und schreibe die Seitenverhältnisse auf, die du zur Lösung der Aufgabe brauchst.



3 Der zweite Strahlensatz

Die gesuchte Gleichung lautet: $\frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

Mit ihr kannst du die gesuchte Strecke berechnen.



Der zweite Strahlensatz

Die Dreiecke SAB und SA'B' sind ähnlich. Es gilt: $\frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

Setze die gegebenen Werte in die Bruchgleichung ein:

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \quad \rightarrow \quad \frac{3\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \frac{x}{12\text{ cm}}$$

Auflösen nach x:

$$\frac{3\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \frac{x}{12\text{ cm}} \quad | \cdot 12\text{ cm}$$

$$\frac{3}{9} \cdot 12\text{ cm} = x$$

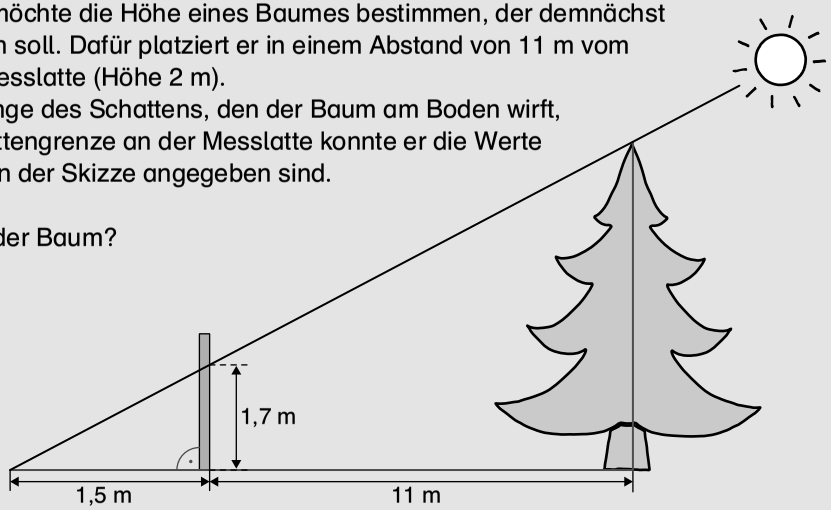
$$x = 4\text{ cm}$$

Die Seite $\overline{AB}$ ist 4 cm lang.

Anwendungsaufgabe Höhe eines Baumes bestimmen

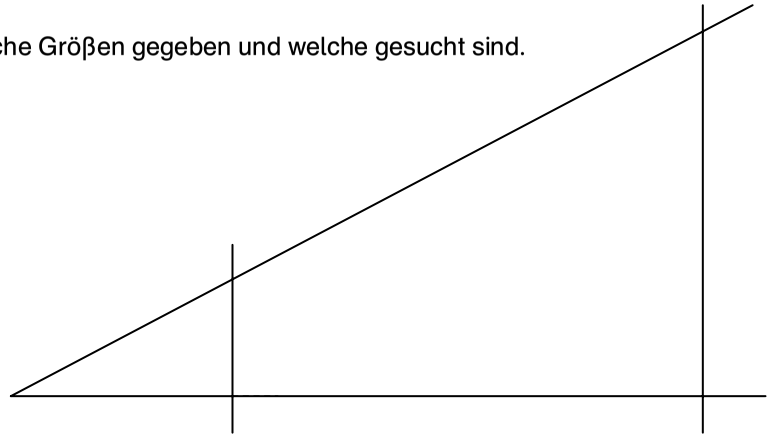
Förster Karl möchte die Höhe eines Baumes bestimmen, der demnächst gefällt werden soll. Dafür platziert er in einem Abstand von 11 m vom Baum eine Messlatte (Höhe 2 m).
Durch die Länge des Schattens, den der Baum am Boden wirft, und die Schattengrenze an der Messlatte konnte er die Werte messen, die in der Skizze angegeben sind.

Wie hoch ist der Baum?



1 Anwendungsaufgabe Höhe eines Baumes bestimmen

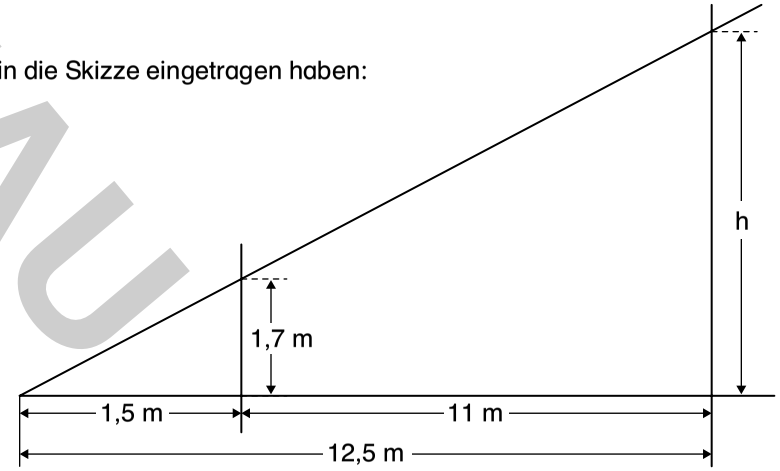
Markiere, welche Größen gegeben und welche gesucht sind.



Welchen Strahlensatz kannst du für die Berechnung verwenden?

2 Anwendungsaufgabe Höhe eines Baumes bestimmen

Das solltest du in die Skizze eingetragen haben:



Du musst also den zweiten Strahlensatz verwenden. Stelle die entsprechende Gleichung auf, um die Höhe des Baumes zu berechnen.

Dreiecksseiten berechnen mit der Tangensfunktion

Dreieck 1:

$$\tan 32° = \frac{a}{6{,}6\text{ cm}} \quad | \cdot 6{,}6\text{ cm}$$

$$6{,}6\text{ cm} \cdot \tan 32° = a$$

$$a \approx 4{,}12\text{ cm}$$

Dreieck 2:

$$\tan 64° = \frac{5{,}9\text{ cm}}{b} \quad | \cdot b \quad | : \tan 64°$$

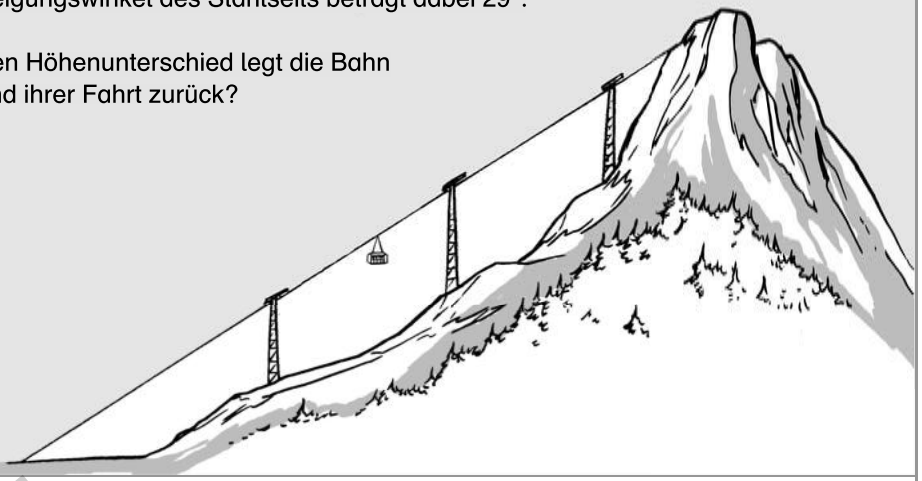
$$b = \frac{5{,}9\text{ cm}}{\tan 64°}$$

$$b \approx 2{,}88\text{ cm}$$

Anwendungsaufgabe Seilbahn

Eine Seilbahn überwindet an einem 1450 m langen Stahlseil ein Bergtal. Der Steigungswinkel des Stahlseils beträgt dabei 29°.

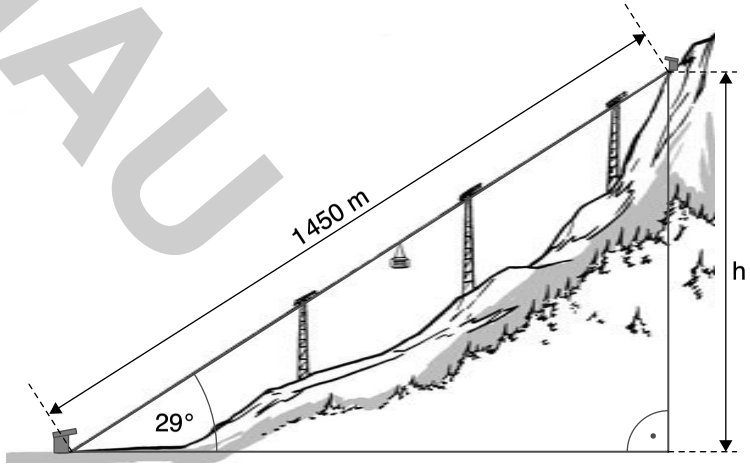
Welchen Höhenunterschied legt die Bahn während ihrer Fahrt zurück?



1 Anwendungsaufgabe Seilbahn

Fertige dir eine Skizze von der Situation an und zeichne dir ein geeignetes, rechtwinkliges Dreieck ein, mit dem du den Höhenunterschied berechnen kannst.

2 Anwendungsaufgabe Seilbahn



Anwendungsaufgabe Gefälle

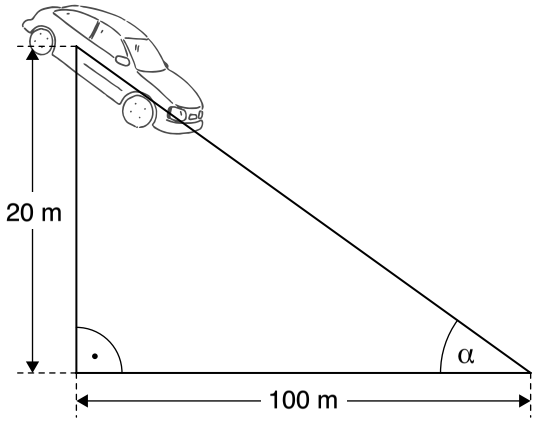
Am Ortseingang von Musterdorf befindet sich das abgebildete Verkehrsschild. Es warnt die Verkehrsteilnehmer vor einem starken Gefälle.

a) Mit welchem Neigungswinkel muss ein Verkehrsteilnehmer rechnen?

b) Wie lang (auf cm gerundet) ist die Straße, wenn die horizontale Weite (die Luftlinie) 60 m beträgt?

1 Anwendungsaufgabe Gefälle

zu a): Ein „Gefälle von 20 %“ bedeutet, dass die Straße auf 100 m Luftlinie einen Höhenunterschied von 20 m aufweist.



2 Anwendungsaufgabe Gefälle

a): Erinnere dich: Wann benutzt du welche Winkelfunktion?

Den Sinus, …	… falls beide Katheten gegeben sind.
Den Kosinus, …	… falls Hypotenuse und Ankathete gegeben sind.
Den Tangens, …	… falls Hypotenuse und Gegenkathete gegeben sind.

Welche Winkelfunktion brauchst du für diese Aufgabe?

3 Anwendungsaufgabe Gefälle

zu a): $\tan \alpha = \frac{20\text{ m}}{100\text{ m}} =$

zu b): Wenn du α mit dem Tangens berechnet hast, ist auch Aufgabe b) kein Problem mehr: