Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das Schönste, was entdeckendes Lernen im Unterricht bewirken kann, sind mathematische Aha-Erlebnisse. Das plötzliche Begreifen von etwas, was kurz vorher noch gedanklich undurchdringbar erschien, ruft in den Schülern[1] nicht nur Stolz auf die eigene Leistung hervor, sondern bildet darüber hinaus eine wichtige Grundlage für das Vertrauen in den eigenen Verstand und in die eigene Urteilsfähigkeit.

„Die schönste Mathematik ist die selbst entdeckte“. – Diese Aussage von Prof. Dr. Henn (TU Dortmund) kann auch als Leitsatz für Autorinnen und Herausgeber der vorliegenden Veröffentlichung gelten. Wir möchten ihn gerne noch präzisieren durch *„Die beim Schüler* ***wirkungsvollste*** *Mathematik ist die selbst entdeckte“*, denn Inhalte, die den Schülern einfach nur „eingetrichtert“ wurden, haben eine kurze Halbwertzeit und sind schon sehr bald nicht mehr abrufbar. Der amerikanische Psychologe Burrhus Frederic Skinner schreibt dazu: *„Bildung ist das, was überlebte, wenn das Gelernte vergessen wurde“.* Auch im Hinblick auf einen **kompetenzorientierten Mathematikunterricht** und auf eine sinnvolle und gewinnbringende **Lebensvorbereitung** ist selbstentdeckendes Lernen unabdingbar, denn die Schüler entwickeln dabei selbst Strategien, erproben und verwerfen sie und suchen neue Lösungswege– Fähigkeiten, die in Alltag und Berufsleben unabdingbar sind.

Wie geht man als Mathematiklehrer jedoch damit um, wenn ein Schüler nicht weiß, wie er an ein neues Problem herangehen soll oder wenn seine Strategie so gar nicht zum Erfolg führen will? Jeder von uns kennt dies aus seiner tagtäglichen Arbeit. Wir haben im Unterricht hierzu sehr gute Erfahrungen mit dem sinnvollen Einsatz von Tippkarten gemacht.

Der **Aufbau** der Unterrichtshilfe ist klar und einfach:
Zu jeder **Aufgabenkarte** gibt es **mehrere Tippkarten**, die gestaffelte Hinweise zur Lösung der Aufgaben geben. Sie bieten Differenzierungsmöglichkeiten sowohl auf der quantitativen Ebene als auch auf der Erschließungsebene (handelnd, bildlich oder symbolisch). Die Schüler wählen individuell aus, wie viele Tippkarten sie benötigen, um zur Lösung zu gelangen – jeder arbeitet dabei in seinem eigenen Tempo.
Zu jeder Aufgabe gibt es jeweils eine **Lösungskarte** zur Selbstkontrolle.

Das übersichtliche **Layout der Karten** garantiert ein optimales Zurechtfinden:

Aufgabenkarte	3 Tippkarte 3
1 Tippkarte 1	4 Tippkarte 4
2 Tippkarte 2	Lösungskarte

Die Karten werden (idealerweise vergrößert) kopiert und ggf. laminiert; so können die Schüler ihre Lösung mit Folienstift darauf notieren. Die Tippkarten werden an einem fest vereinbarten Ort im Klassenzimmer abgelegt oder befinden sich in der Hand des Lehrers, der sie dann entsprechend einzeln ausgibt.

Folgende Hauptthemen mit allen wesentlichen Unterthemen der Klasse 9 werden abgedeckt:

- Lineare Gleichungssysteme
- Reelle Zahlen
- Satzgruppe des Pythagoras
- Quadratische Gleichungen und Funktionen
- Berechnungen am Kreis
- Zylinder, Kegel, Pyramide

Viel Erfolg beim Einsatz der Materialien wünschen Herausgeber und Autorinnen

[1] Aufgrund der besseren Lesbarkeit ist in diesem Buch mit Schüler auch immer Sch… Lehrerin etc.

Lineare Gleichungen aufstellen

Gesamtbetrag = 250 € + 14 € · Anzahl Monate
y = 250 + 14 · x

Beachte, dass das Malzeichen oft weggelassen wird und 14x zuerst steht.

y = 14x + 250

Graphen von linearen Funktionen zeichnen

Gegeben ist die lineare Funktion $y = 0{,}5\,x - 3$.

Zeichne ihren Graphen.

1 Graphen von linearen Funktionen zeichnen

… Funktion besitzt die Form **y = m · x + b**, d. h. der zugehörige Graph ist eine …**rade**.

…st dabei die Steigung dieser Geraden.
…st der y-Achsenabschnitt.

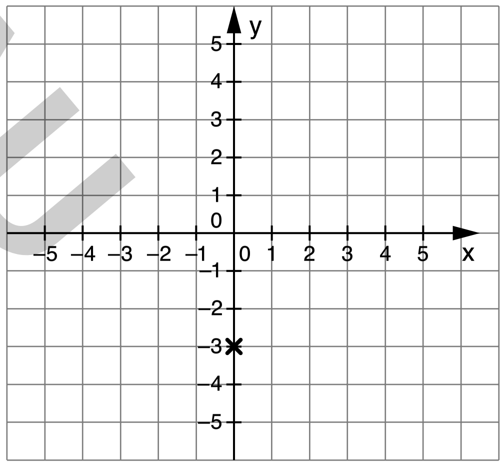
… = ____

… = ____

…s m und b aus der vorgegebenen Funktion ab.

2 Graphen von linearen Funktionen zeichnen

b = –3



1 Lineare Gleichungssysteme grafisch lösen I

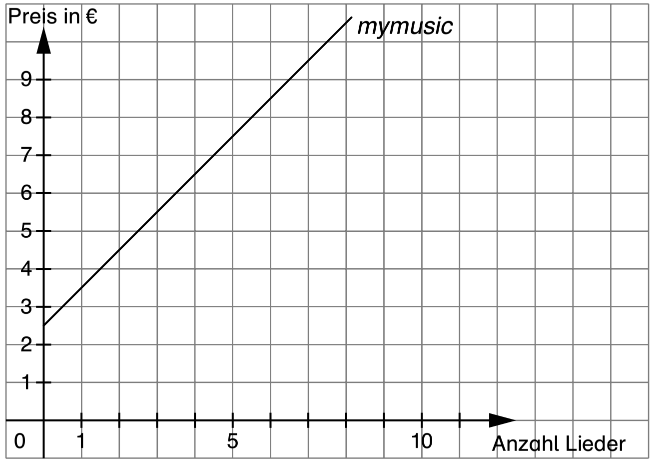
Überlege zuerst mithilfe einer Wertetabelle.

Anzahl Lieder	Kosten bei *mymusic*
0	2,50 €
1	
2	
3	
...	

Anzahl Lieder	Kosten bei *sound*
0	0,00 €
1	
2	
3	
...	

2 Lineare Gleichungssysteme grafisch lösen I

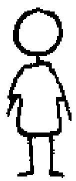
Hier siehst du den Graphen für *mymusic*. Zeichne den Graphen für *sound* ein. Was kannst du beiden Graphen entnehmen?



3 Lineare Gleichungssysteme grafisch lösen I

Die Preise steigen
bei beiden Anbietern gleichmäßig (linear) an.

Bei ___ Liedern muss ich bei beiden Anbietern gleich viel bezahlen. Ab ___ Liedern lohnt sich der Anbieter ________________.



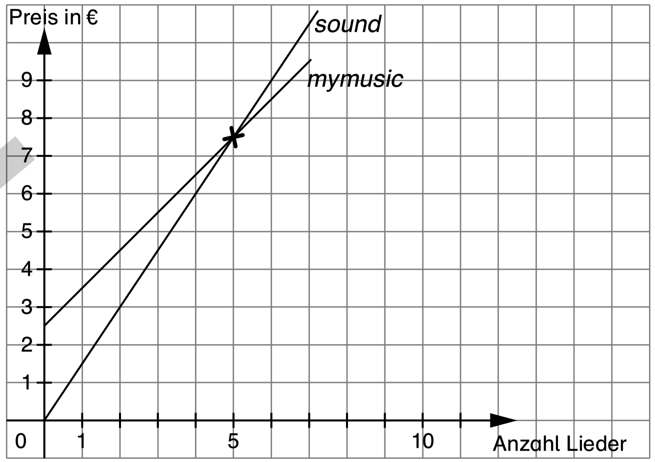
Lineare Gleichungssysteme grafisch lösen I

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist bei (5|7,5). Das bedeutet, dass Anna für 5 Lieder bei beiden Anbietern 7,50 € zahlt. Unter 5 Liedern ist *sound* billiger. Ab 5 Liedern lohnt sich *mymusic*.

Die Funktionsgleichungen lauten:

mymusic: y = x + 2,50

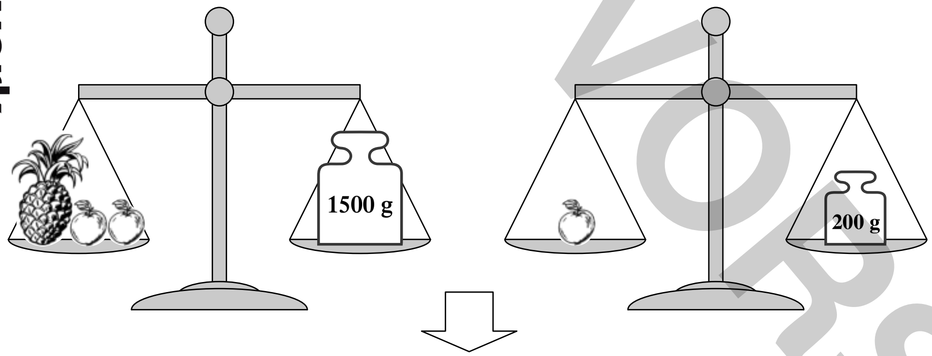
sound: y = 1,50x



...nkenberger/S. Nikolaus: Lerninhalte selbstständig erarbeiten Mathematik 9 © Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

1 Einsetzungsverfahren

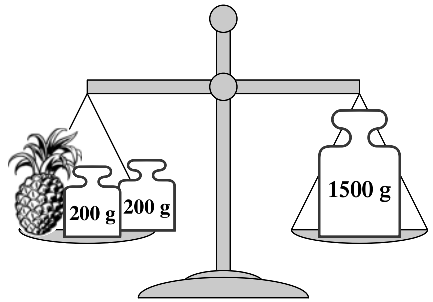
Was bedeutet „Einsetzungsverfahren"?



Was kannst du aus beiden Gleichungen folgern?

2 Einsetzungsverfahren

1 Apfel wiegt 200 g.



Da das Einzelgewicht von einem Apfel bekannt ist (200 g), kannst du für jeden Apfel in der Waage links 200 g **einsetzen**.

Wie schwer ist also eine Ananas? → ________ g

3 Einsetzungsverfahren

…ertragen auf unsere Gleichungen bedeutet das:

Eine der Gleichungen sollte in der Form y = … sein.
Setze den Wert von y in die zweite Gleichung ein.

$\mathbf{y} = 2x + 8$

$\downarrow$

$4x + \mathbf{y} = 32$ } in Gleichung I einsetzen

⇒ $4x + \mathbf{(2x + 8)} = 32$

Löse nach x auf. Berechne anschließend y.

Einsetzungsverfahren

I $4x + y = 32$
II $y = 2x + 8$
} eine Gleichung in der Form y = …

$4x + 2x + 8 = 32$ } y in Gleichung I einsetzen

$6x + 8 = 32 \quad | -8$
$6x = 24 \quad | :6$
$\mathbf{x = 4}$
} nach x auflösen

$\mathbf{y} = 2 \cdot 4 + 8 \mathbf{= 16}$ } Wert für x in Gleichung **II** einsetzen

$\mathbb{L} = \{(4|16)\}$

Wurzelgesetze

…erechne die Wurzelterme.

a) $\sqrt{18} : \sqrt{2} =$

b) $\sqrt{29} - \sqrt{4} =$

c) $\sqrt{144 \cdot 81} =$

1 Wurzelgesetze

Berechne die linken und rechten Waagschalen. Welche der Waagen stehen im Gleichgewicht?

I. $\sqrt{16} \cdot \sqrt{4}$? $\sqrt{16 \cdot 4}$

II. $\sqrt{16} + \sqrt{4}$? $\sqrt{16 + 4}$

III. $\sqrt{16} : \sqrt{4}$? $\sqrt{16 : 4}$

IV. $\sqrt{16} - \sqrt{4}$? $\sqrt{16 - 4}$

2 Wurzelgesetze

$\sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{16 \cdot 4}$
$4 \cdot 2 = \sqrt{64}$
$8 = 8$ ✓

II. $\sqrt{16} + \sqrt{4} = \sqrt{16 + 4}$
$4 + 2 = \sqrt{20}$
$6 = 4{,}47$ ⚡

$\sqrt{16} : \sqrt{4} = \sqrt{16 : 4}$
$4 : 2 = \sqrt{4}$
$2 = 2$ ✓

IV. $\sqrt{16} - \sqrt{4} = \sqrt{16 - 4}$
$4 - 2 = \sqrt{12}$
$2 = 3{,}46$ ⚡

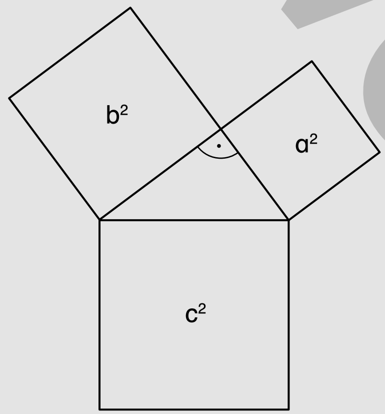
…se Regel nennt man **Wurzelgesetz**. Es gilt nur bei der ________________ und der ________________.

3 Wurzelgesetze

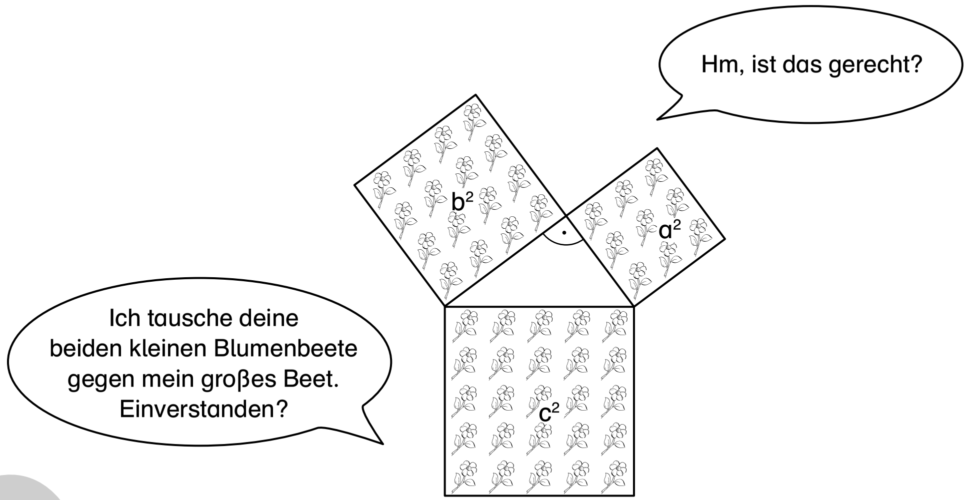
Zu b):

Satz des Pythagoras entdecken

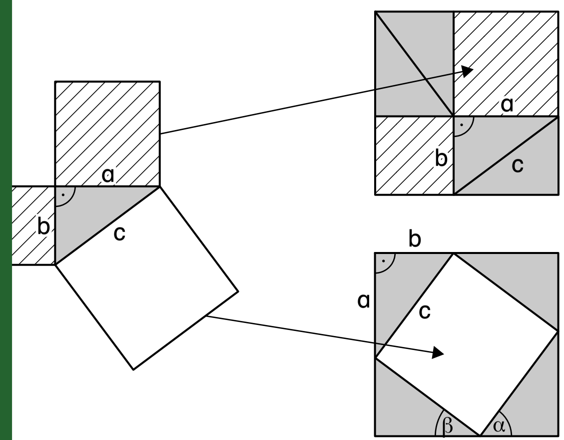
…etrachte die 3 Quadrate. In welcher Beziehung stehen ihre Flächeninhalte …ueinander?



1 Satz des Pythagoras entdecken



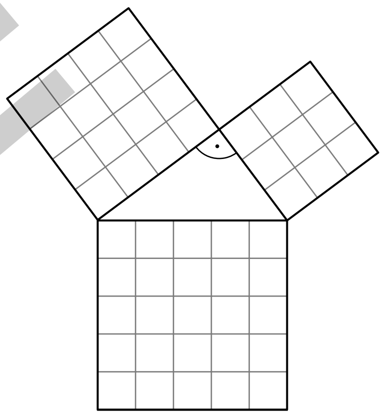
2 Satz des Pythagoras entdecken



Die Quadrate aus der linken Figur wurden mithilfe von je 4 kongruenten Dreiecken zu 2 gleich großen Quadraten ergänzt. Was sagt das über die Flächeninhalte der grauen Quadrate und des weißen Quadrates aus?

3 Satz des Pythagoras entdecken

Die 3 Quadrate sind nun mit Einheitsquadraten gefüllt. So kannst du besser vergleichen.



Umkehrung des Satzes von Pythagoras

…berprüfe rechnerisch, ob die folgenden Dreiecke rechtwinklig sind.

… a = 15 cm b = 8 cm c = 17 cm

… a = 2 cm b = 3 cm c = 4 cm

1 Umkehrung des Satzes von Pythagoras

2 Umkehrung des Satzes von Pythagoras

… ein Dreieck rechtwinklig, dann gilt:

…thete² + Kathete² = Hypotenuse².

…kehrung:

…nn in einem Dreieck Kathete² + Kathete² = Hypotenuse² gilt, dann ist das Dreieck …htwinklig.

3 Umkehrung des Satzes von Pythagoras

Setze die gegebenen Seitenlängen in die Gleichung

Kathete² + Kathete² = Hypotenuse²

ein. Wenn eine wahre Aussage entsteht, dann ist das Dreieck rechtwinklig, sonst nicht.

Die längste Seite muss in der Formel für die Hypotenuse eingesetzt werden.

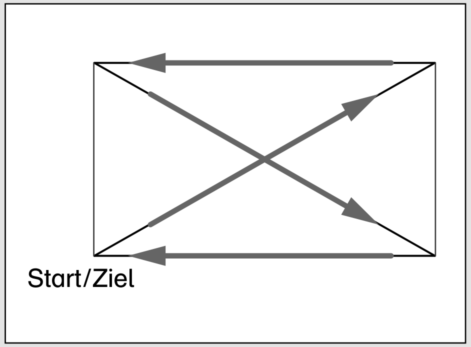
Umkehrung des Satzes von Pythagoras

a) $(15\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2 = (17\text{ cm})^2$
$225\text{ cm}^2 + 64\text{ cm}^2 = 289\text{ cm}^2$
$289\text{ cm}^2 = 289\text{ cm}^2$ → wahre Aussage, also ist das Dreieck rechtwinklig

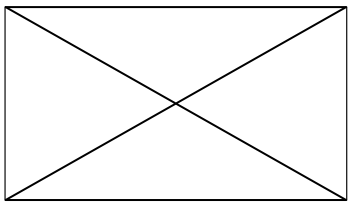
b) $(2\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 = (4\text{ cm})^2$
$4\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2 = 16\text{ cm}^2$
$13\text{ cm}^2 = 16\text{ cm}^2$ → falsche Aussage, denn $13 \neq 16$, also ist das Dreieck nicht rechtwinklig

Anwendungsaufgabe Pythagoras

Arndt soll im Fußballtraining zum Aufwärmen die eingezeichnete Strecke über den Sportplatz laufen. Wie viel m legt er dabei zurück? Der Sportplatz ist 100 m lang und 50 m breit.



1 Anwendungsaufgabe Pythagoras

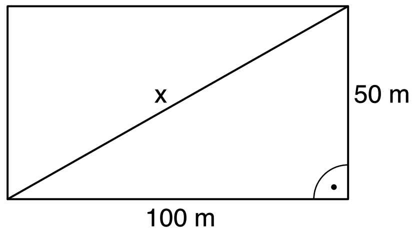


…ge die gegebenen Längen in die Skizze ein. Suche das rechtwinklige Dreieck und …scheide, was gegeben und was gesucht ist (Kathete/Hypotenuse). Benenne die …suchte Seite mit einer Variablen, z. B. x.

2 Anwendungsaufgabe Pythagoras

gegeben: Kathete, Kathete

gesucht: Hypotenuse



Setze in die Gleichung des Satzes von Pythagoras ein und berechne x. Runde auf volle m.

> Beachte: Diagonalen im Rechteck sind immer gleich lang.

Berechne anschließend die eingezeichnete Gesamtstrecke.

Normalparabel

a) Zeichne die Funktion $y = x^2$ in ein Koordinatensystem.

b) Welche Eigenschaften hat diese Funktion?

1 Normalparabel

Zu a): Finde möglichst viele Zahlenpaare (x | y), die die Gleichung $y = x^2$ erfüllen.

Wirf eine Zahl für x ein.

z. B. **−3**

Erhalte das Ergebnis y.

?

2 Normalparabel

Zu a): Die Wertepaare einer Funktion kannst du in einer Wertetabelle festhalten. Vervollständige die Tabelle.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	+9						

… x kannst du natürlich noch weitere Zahlen auswählen.
…ge die Zahlenpaare in ein Koordinatensystem ein.

3 Normalparabel

Zu b):

Welche Eigenschaften hat die Funktion $y = x^2$? Kreuze an.

- ☐ achsensymmetrisch zur y-Achse
- ☐ achsensymmetrisch zur x-Achse
- ☐ punktsymmetrisch zum Ursprung
- ☐ verläuft durch den Ursprung
- ☐ verläuft linear

2 Funktion der Form $y = (x - d)^2$

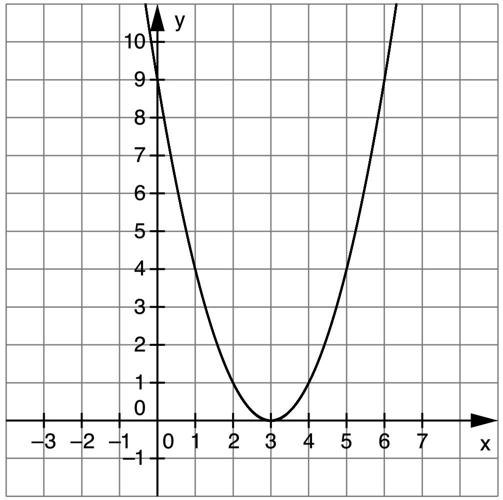
Zu a): Du hast Schwierigkeiten, die Wertetabelle auszufüllen? – Wenn du beispielsweise $x = 2$ in die Gleichung $y = (x - 3)^2$ einsetzt, rechnest du

$(\mathbf{2} - 3)^2 = \mathbf{+1}$

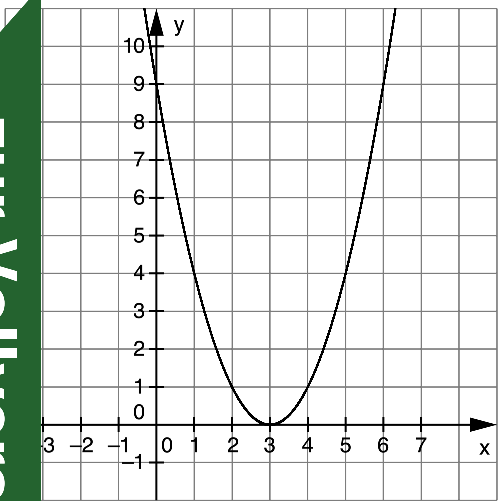
Der Punkt (2|1) liegt somit auf dem Graphen der Funktion.

3 Funktion der Form $y = (x - d)^2$

Zu b):
So sieht der Graph von $y = (x - 3)^2$ aus. Welche Verschiebung ergibt sich im Vergleich zur Normalparabel $y = x^2$?



Funktion der Form $y = (x - d)^2$



$y = (x \mathbf{- 3})^2 \rightarrow$ Die Zahl –3 zeigt an, dass die Normalparabel um 3 Einheiten nach **rechts** verschoben wurde.

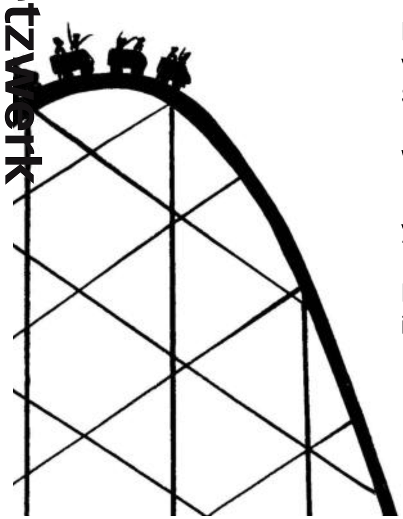
Funktion der Form $y = (x - d)^2 + e$

a) Zeichne die Funktion $y = (x + 2)^2 - 1$ in ein Koordinatensystem.

b) Vergleiche den entstandenen Graphen mit der Normalparabel.

1

SCHEITELPUNKT BESTIMMEN (NORMALFORM) I



Kannst du dich an die Scheitelpunktform **$y = a(x - d)^2 + e$** erinnern, an der man den Scheitelpunkt direkt ablesen konnte?

Wo ist der Scheitelpunkt in diesem Beispiel?

$y = (x - 3)^2 \rightarrow S(\boxed{} | \boxed{})$

Bringe deine Gleichung $y = x^2 - 8x + 16$ in die Scheitelpunktform.

2

SCHEITELPUNKT BESTIMMEN (NORMALFORM) I

Du kommst nicht weiter? Die binomischen Formeln helfen dir.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Klammerschreibweise wie Scheitelpunktform

aufgelöste Form wie Normalform

______________________ $= x^2 - 8x + 16$

3

SCHEITELPUNKT BESTIMMEN (NORMALFORM) I

…nde zur Übung die 1. und 2. binomische Formel „vorwärts" an:

… $5)^2 =$ ………………………

… $3)^2 =$ ………………………

Erinnerst du dich an die binomischen Formeln?

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

4

SCHEITELPUNKT BESTIMMEN (NORMALFORM) I

Kannst du die binomische Formel auch „rückwärts" anwenden?

$(\_\_\_ - \_\_\_)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(\_\_\_ - \_\_\_)^2 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16$

Was ist b?

2 Anwendungsaufgabe I

…etze y = 0, um die Nullstelle der Funktion zu berechnen.

…= −0,04x² + 0,8x + 2,3

Man kann die Variable x in einer quadratischen Gleichung der Form $0 = x^2 + px + q$ mit der pq-Formel berechnen.

x^2 muss alleine stehen!

$0 = \mathbf{-0{,}04}x^2 + 0{,}8x + 2{,}3 \quad | : (-0{,}04)$
$0 = x^2 - 20x - \_\_\_\_$

3 Anwendungsaufgabe I

p = ____ q = ____

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = 10 \pm \sqrt{10^2 \_\_\_\_}$$

$x_1 =$ ____ $x_2 =$ ____

Anwendungsaufgabe I

…n zu ermitteln, wo die Kugel auf dem Boden auftrifft, musst du die Nullstelle …echnen.

…$-0{,}04x^2 + 0{,}8x + 2{,}3 \quad | : (-0{,}04)$
$x^2 - 20x - 57{,}5$

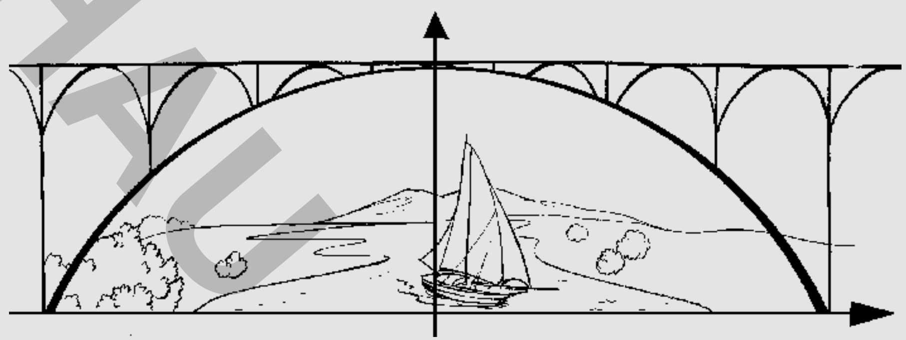
…$= 10 \pm \sqrt{(-10)^2 + 57{,}5}$

…$= 10 \pm \sqrt{157{,}5}$

…$\approx 22{,}5$ $\quad x_2 \approx -2{,}5$

…e Nullstelle ist bei N (22,5|0). Das bedeutet, dass die Kugel 22,5 m weit fliegt. Die …eite Lösung ergibt keinen Sinn.

Anwendungsaufgabe II



Die Brücke wurde so in ein Koordinatensystem gelegt, dass sie durch die Gleichung $y = -0{,}05\,x^2 + 38$ beschrieben werden kann.

a) Wie hoch ist die Brücke?
b) Wie weit sind die beiden Brückenenden voneinander entfernt?