5. Alles möglich mit dem rechten Winkel *(Satz des Pythagoras, Trigonometrie und Winkelsumme im Dreieck)*

Zeitbedarf

45–90 Minuten

Voraussetzungen

Die S. kennen den Satz des Pythagoras und die trigonometrischen Beziehungen Sinus, Kosinus und Tangens sowie die Anwendung der Winkelsumme im Dreieck.

Kompetenzen

- S. erkennen, wann welches Lösungsverfahren für Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck angewendet werden kann.
- S. führen unterschiedliche Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken durch.
- S. finden passende Lösungswege und erkennen (teilweise), dass unterschiedliche Lösungswege zum gleichen Ergebnis führen.
- S. zerlegen allgemeine Dreiecke so, dass rechtwinklige Dreiecke entstehen, und berechnen fehlende Werte.

Differenzierung

Beim Einsatz des Tandembogens ist eine quantitative Differenzierungsmöglichkeit gegeben. Besonders schnelle S. können beide Seiten lösen.
In der anschließenden Arbeitsphase wird ein Arbeitsblatt (**M 3a–M 3c**) eingesetzt, welches in drei unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen angeboten wird. Schwierigkeitsunterschiede auf den drei Arbeitsblättern ergeben sich durch Hilfen wie Skizzen oder vorgegebene Lösungswege. Von Schwierigkeitsstufe zu Schwierigkeitsstufe sind zudem mehr Ergebnisse zu berechnen.

Vorbereitung

- Stichwortkarten (**M 1**) vergrößert auf festes Papier kopieren und ausschneiden
- Tandembogen (**M 2**) in ausreichender Zahl auf festes Papier kopieren und in der Mitte knicken
- Arbeitsblätter (**M 3a–M 3c**) jeweils in ausreichender Zahl kopieren
- Arbeitsblatt (**M 4**) auf Folie und als Hausaufgabe in ausreichender Zahl kopieren
- Tafelanschrieb mit einem rechtwinkligen Dreieck vorbereiten

Ablauf

Motivation / Themenfindung

- L. klappt die Tafel auf. Dort ist ein rechtwinkliges Dreieck dargestellt. Der rechte Winkel ist markiert. Sonstige Beschriftungen fehlen.
- S. ergänzen Bezeichnungen der Eckpunkte, Seiten und Winkel an der Tafel.
- L. gibt verschiedene Impulse wie z.B.: „Wenn α 27° beträgt, wie groß ist dann β?“ L. hängt passend dazu das Stichwort „Winkelsumme“ (von **M 1**) auf.
- L.: „Wenn ich die Seitenlängen von a und c kenne, wie kann ich dann die Seitenlänge von b bestimmen?“ L. hängt passend dazu das Stichwort „Satz des Pythagoras“ (von **M 1**) auf.
- S. stellen sich gegenseitig im Plenum ähnliche Fragen. Weitere passende Stichwörter (von **M 1**) werden an der Tafel ergänzt.

Arbeitsauftrag

L. erklärt: „Ihr kennt verschiedene Möglichkeiten, um fehlende Werte im rechtwinkligen Dreieck zu berechnen. Heute sollt ihr möglichst viele Möglichkeiten üben. In der ersten Phase arbeitet ihr immer zu zweit mit dem Tandembogen. Ihr stellt diesen Tandembogen so zwischen euch auf, dass jeder eine Seite sieht. Die Aufgaben, die ihr vor euch seht, sind die Aufgaben, die ihr lösen müsst. Eure Lösungen teilt ihr eurem Partner mit. Er kann euch dann sagen, ob ihr die Aufgabe richtig gelöst habt. Wechselt euch immer ab. Wenn ihr sehr schnell fertig seid, könnt ihr den Tandembogen umdrehen und die Seite lösen, die vorher euer Partner gelöst hat.“

Erarbeitung 1

- Jedes Zweierteam erhält einen Tandembogen (**M 2**).
- S. bearbeiten in Zweierteams den Tandembogen.
- L. fragt, ob es Schwierigkeiten gab. Diese werden bei Bedarf geklärt.

Erarbeitung 2

- L. teilt die Arbeitsblätter (**M 3a–M 3c**) aus.
- S. dürfen sich für eine Schwierigkeitsstufe entscheiden.
- S. bearbeiten das Arbeitsblatt in Einzelarbeit.
- L. steht bei Bedarf beratend zur Verfügung.

Kontrolle der Ergebnisse

Die einzelnen Arbeitsblätter werden besprochen. Viele Aufgaben lassen sich parallel besprechen, da die Ergebnisse gleich sind. Bei Schwierigkeiten oder Unklarheiten werden diese besprochen und ggf. an der Tafel notiert.

Abschluss und Ausblick

- L. zeigt die Folie (**M 4**).
- S. äußern sich dazu.
- Im Plenum wird nach geeigneten Teilungen gesucht, die eingezeichnet werden.
- L. teilt das Arbeitsblatt (**M 4**) als Kopie aus. Die Aufgaben werden von den S. direkt im Anschluss oder als Hausaufgabe gelöst.

Lösungen

M3a

1. $(2{,}6\,\text{cm})^2 + (5{,}4\,\text{cm})^2 = 35{,}92\,\text{cm}^2 \quad c \approx 6{,}0\,\text{cm}$

2. $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{5\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = 0{,}625 \qquad \alpha \approx 51{,}3°$

   $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{5\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = 0{,}625 \qquad \beta \approx 38{,}7°$

3. $\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin 48° \cdot 10\,\text{cm} = a \approx 7{,}43\,\text{cm}$

   $180° - 90° - 48° = 42° \qquad \beta = 42°$

4. $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3\,\text{m}}{12\,\text{m}} = 0{,}25 \qquad \alpha \approx 14°$

   $\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{12\,\text{m}}{3\,\text{m}} = 4 \qquad \beta \approx 76°$

M3b

Die Zeichnungen entsprechen denen von M 3a (S. 35).

1. siehe M 3a, Aufgabe 1

2. a) siehe M 3a, Aufgabe 2

   b) $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{5\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = 0{,}625 \qquad \alpha \approx 51{,}3°$

   Für die Berechnung von a gilt: Lösung über Pythagoras oder Trigonometrie möglich:

   $c^2 = a^2 + b^2 \qquad a^2 = (8\,\text{cm})^2 - (5\,\text{cm})^2 = 39\,\text{cm}^2$

   $a \approx 6{,}24\,\text{cm}$

3. siehe M 3a, Aufgabe 3

4. siehe M 3a, Aufgabe 4

M3c

1. Zeichnung siehe M 3a (S. 35), Aufgabe 1

   rechnerischer Beweis: $(2{,}6\,\text{cm})^2 + (5{,}4\,\text{cm})^2 \approx (6{,}0\,\text{cm})^2$

2. siehe M 3a, Aufgabe 2, und M 3b, Aufgabe 2

3. siehe M 3a, Aufgabe 3

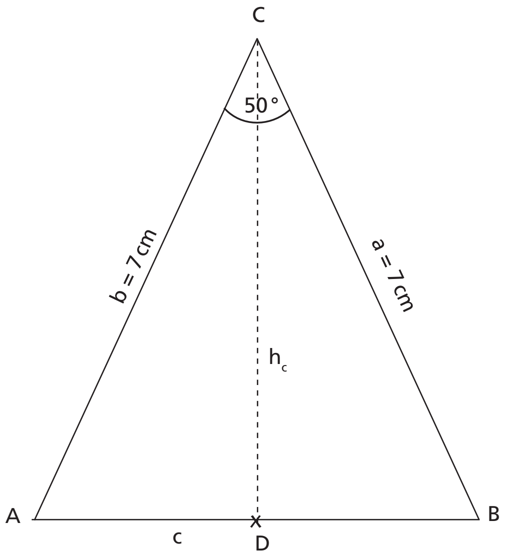
   Für die Berechnung von b gilt: Lösung über Pythagoras oder Trigonometrie möglich:

   $c^2 = a^2 + b^2 \qquad b^2 = (10\,\text{cm})^2 - (7{,}43\,\text{cm})^2 \approx 44{,}8\,\text{cm}^2 \quad b \approx 6{,}7\,\text{cm}$

4. siehe M 3a, Aufgabe 4

   Für die Berechnung von c gilt: Lösung über Pythagoras oder Trigonometrie möglich:

   $c^2 = a^2 + b^2 \qquad c^2 = (3\text{ m})^2 + (12\text{ m})^2 = (153\text{ m})^2 \qquad c \approx 12{,}37\text{ m}$



1. **Beispielhafter Lösungsweg:**

   Das Dreieck ist gleichschenklig, also gilt $\alpha = \beta$.

   Berechnung von α und β: 180°– 50° = 130°

   130° : 2 = 65° → $\alpha = \beta$ = 65°

   Das Dreieck wird durch h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt:

   Jetzt kann $\overline{AD}$ berechnet werden:

   $\cos \alpha = \frac{\overline{AD}}{7\,cm}$ → $\overline{AD} = \cos 65° \cdot 7\,cm \approx 2{,}96\,cm$

   Jetzt kann c berechnet werden: $c = 2 \cdot 2{,}96\,cm = 5{,}92\,cm$

2. **Beispielhafter Lösungsweg:**

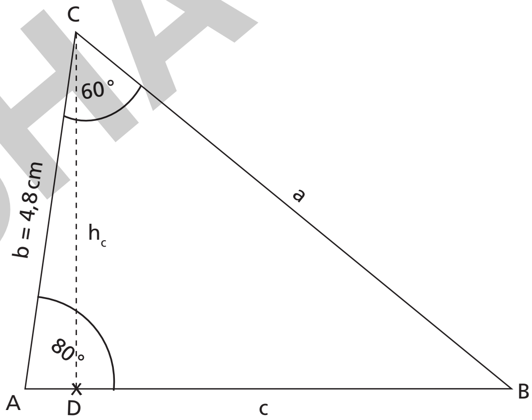
   Berechnung von β: 180° – 80° – 60° = 40° → β = 40°

   Das Dreieck wird durch h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt:

   Jetzt kann h_c berechnet werden:

   $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$ → $h_c = \sin 80° \cdot 4{,}8\,cm \approx 4{,}73\,cm$

   Berechnung von a: $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$ → $a = \frac{h_c}{\sin 40°} \approx 7{,}36\,cm$



3. **Beispielhafter Lösungsweg:**

   Das Dreieck wird durch h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt:

   Jetzt kann h_c berechnet werden: $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$ → $h_c = \sin 30° \cdot 3{,}7\,cm = 1{,}85\,cm$

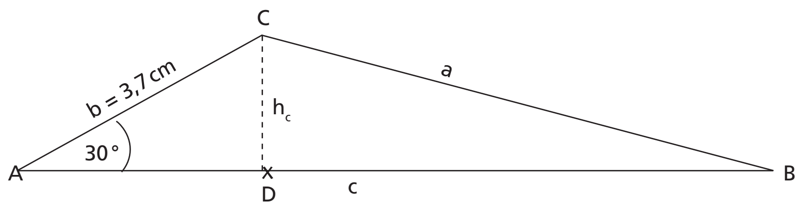
   Berechnung von $\overline{AD}$: $\cos \alpha = \frac{\overline{AD}}{b}$ → $\overline{AD} = \cos 30° \cdot 3{,}7\,cm \approx 3{,}2\,cm$

   Berechnung von $\overline{DB}$: 10 cm – 3,2 cm = 6,8 cm

   Berechnung von a: $a^2 = h_c^2 + \overline{DB}^2$ $a^2 = (1{,}85\,cm)^2 + (6{,}8\,cm)^2 \approx 49{,}66\,cm^2$ → $a \approx 7\,cm$

   Berechnung von β: $\cos \beta = \frac{\overline{DB}}{a} = \frac{6{,}8\,cm}{7\,cm} \approx 0{,}97$ → $\beta = 13{,}7°$

   Berechnung von γ: 180° – 30° – 13,7° = 136,3°



6. Viel zu falten *(Oberfläche und Volumen von Körpern, auch zusammengesetzten Körpern)*

Zeitbedarf

90 Minuten

Voraussetzungen

Die S. kennen Quader, Zylinder, Pyramide, Kegel und können deren Oberfläche und Volumen berechnen. Bei den Spitzkörpern ist hierzu die Anwendung des Satzes des Pythagoras (zur Berechnung der Körperhöhe) erforderlich. Es ist ebenso möglich, die Körperhöhe durch Messen oder Vergleichen mit dem Quader oder Zylinder zu ermitteln.

Kompetenzen

- S. fertigen Pappmodelle verschiedener Körper an.
- S. berechnen Oberfläche und Volumen der Körper.
- S. setzen einzelne Körper zu zusammengesetzten Körpern zusammen und berechnen die neue Oberfläche.
- S. fertigen einen Körper nach eigenem Entwurf an, in welchem alle anderen Körper ausreichend Platz finden.

Differenzierung

Es kann eine quantitative Differenzierung bei der Anzahl an zu lösenden Aufgaben auf dem Arbeitsblatt **M 3** erfolgen. Das Arbeitsblatt **M 4** am Ende der Stunde ist sehr offen gehalten und ermöglicht Lösungen auf unterschiedlichen Niveaustufen.

Vorbereitung

- Allgemeiner Hinweis: Die vorgegebenen Körper sind so gestaltet, dass vielfältige zusammengesetzte Körper möglich sind, die deckungsgleiche Flächen haben. Ein Zylinder ist bewusst so groß gestaltet, dass darauf weitere Körper gesetzt werden können, welche eine kleinere Grundfläche haben, um dieses Prinzip ebenfalls zu verdeutlichen.
- Bild zum Stichwort „Verhüllter Reichstag, Christo“ suchen und auf Folie drucken
- Infotext (**M 1**) auf Folie kopieren
- Ausschneidebögen (**M 2a–M 2f**) in ausreichender Zahl auf festes Papier kopieren
- Arbeitsblatt „Zusammengesetzte Körper“ (**M 3**) in ausreichender Zahl kopieren
- Arbeitsblatt „Verpackung herstellen“ (**M 4**) in ausreichender Zahl kopieren (der Arbeitsauftrag ist zweimal auf der Seite abgebildet)
- festes Papier in größerer Menge sowie einige Scheren und Klebstoff für die Bearbeitung von **M 4** bereithalten

Ablauf

Motivation / Themenfindung

- L. legt die vorbereitete Folie mit dem Bild des verhüllten Reichstags auf.
- S. äußern sich dazu.
- Der Infotext (**M 1**) wird aufgedeckt und besprochen.
- S. suchen auf der Abbildung nach ihnen bekannten Formen und beschreiben diese.
- Der Begriff der Oberfläche wird deutlich hervorgehoben.

Arbeitsauftrag

- L. erklärt: „Wir werden uns in der kommenden Stunde mit dem Volumen und der Oberfläche einiger Körper beschäftigen. Dazu stellt ihr als Erstes verschiedene Körper aus Pappe her. Ihr benötigt eine Schere und Klebstoff.“
- L. zeigt die Ausschneidebögen (**M 2a–M 2f**) und S. erläutern, welchen Körper man jeweils daraus herstellen kann.

Erarbeitung 1

- L. teilt die Materialien aus. Jeder S. erhält alle Ausschneidebögen (**M 2a–M 2f**). Um Zeit zu sparen, ist es auch möglich, das Ausschneiden als vorbereitende Hausaufgabe bereits am Tag vorher aufzugeben. Das Zusammenkleben sollte jedoch in der Schule erfolgen, da es sonst zu Transportschäden an den Körpern kommen kann.
- S. stellen die Körper her und berechnen jeweils die Oberfläche und das Volumen.
- L. verweist dabei z.B. auf die Formelsammlung oder das Mathematikbuch als Nachschlagewerk.
- S. können sich auch gegenseitig bei der Berechnung behilflich sein.

Katharina Bühler: Sternstunden Mathematik 9/10
© Auer Verlag

Kontrolle der Zwischenergebnisse
Die Ergebnisse der Volumen- und Oberflächenberechnungen werden bekannt gegeben, um Folgefehler in der weiteren Erarbeitung zu vermeiden. Unklarheiten werden besprochen.

Erarbeitung 2
- L. bildet aus zwei beliebigen Körpern einen zusammengesetzten Körper und fragt, wie sich das Volumen verändert.
- S. äußern sich dazu.
- L. fragt, wie sich die Oberfläche verändert.
- S. äußern sich erneut. Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers wird beispielhaft an der Tafel berechnet. Dabei wird besonders viel Wert auf eine übersichtliche Darstellung gelegt.
- L. teilt das Arbeitsblatt „Zusammengesetzte Körper" (**M 3**) aus.
- S. bearbeiten das Arbeitsblatt in Einzel- oder Partnerarbeit.
- L. steht dabei beratend zur Verfügung.

Präsentation der Ergebnisse
Einzelne S. stellen ihre zusammengesetzten Körper und ihre Lösungen vor. Dabei wird erneut thematisiert, wie die neue Oberfläche geschickt berechnet werden kann. Mögliche Unklarheiten werden beseitigt.

Abschluss
- L. stellt den letzten Arbeitsauftrag vor: „Nun habt ihr alle ganz praktische Körper hergestellt. Es wäre schade, wenn sie in eurem Rucksack zerdrückt werden. Deshalb dürft ihr euch nun überlegen, wie ihr die Körper gut in einem anderen Körper verpacken könnt, sodass alle Körper ausreichend Platz haben. Jeder von euch ist also ein Verpackungskünstler wie Christo und verpackt seine Körper so, wie es ihm gefällt. Wichtig ist nur, dass euer Entwurf groß genug ist, um alle Körper zu verpacken. Die Form dürft ihr euch selbst aussuchen."
- L. teilt das Arbeitsblatt „Verpackung herstellen" (**M 4**) aus.

Ausblick
- S. bearbeiten den Arbeitsauftrag (ggf. als Hausaufgabe – die Entwürfe werden dann am nächsten Tag mit in die Schule gebracht). Die Schüler erhalten ausreichend Material, um ihren selbst gestalteten Körper herzustellen.
- Anschließend werden die verschiedenen Verpackungsmöglichkeiten gegenseitig präsentiert und Vor- und Nachteile der einzelnen Verpackungen an der Tafel stichwortartig festgehalten. Zudem kann ein Vergleich der Volumina und Oberflächen der einzelnen Verpackungen angestellt werden. Die Verpackung mit dem geringsten Volumen und mit der kleinsten Oberfläche wird mit der Verpackung mit der größten Oberfläche und dem größten Volumen verglichen. Außerdem können ästhetische Aspekte thematisiert werden.

Lösungen

M2a

3. $V = G \cdot h$
   $V = 4\,cm \cdot 4\,cm \cdot 9\,cm = 144\,cm^3$

4. $O = 2 \cdot G + M$
   $O = 2 \cdot 4\,cm \cdot 4\,cm + 4 \cdot 4\,cm \cdot 9\,cm = 176\,cm^2$

M2b

3. $V = G \cdot h$
   $V = \pi \cdot r^2 \cdot 9\,cm = \pi \cdot (2\,cm)^2 \cdot 9\,cm \approx 113{,}10\,cm^3$

4. $O = 2 \cdot G + M$
   $O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot (2\,cm)^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2\,cm \cdot 9\,cm \approx 138{,}23\,cm^2$

M2e

Ausschneidebogen Rechteckpyramide

Arbeitsauftrag

1. Schneide das Netz der Rechteckpyramide aus.
2. Klebe die Rechteckpyramide sorgfältig zusammen.
3. Berechne die Höhe der Rechteckpyramide.
4. Berechne das Volumen der Rechteckpyramide.
5. Berechne die Oberfläche der Rechteckpyramide.