Relativitätstheorie

Grundlagen der Relativitätstheorie – Elementar und verständlich

Dr. Hannes Stoppel, Gelsenkirchen

Die spezielle Relativitätstheorie gehört zu den Inhalten des Physikunterrichts der Sekundarstufe II. Oft fällt es schwer, die Inhalte des Themas so weit zu reduzieren, dass alle Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, ihre Grundlagen komplett zu verstehen. Diese Unterrichtssequenz bietet hierfür eine streckenweise untypische Möglichkeit. Durch Erklärungen an Abbildungen und mithilfe von Textlücken sind die Grundgedanken der speziellen Relativitätstheorie gut nachvollziehbar. Es existieren viele mögliche Pfade für Sequenzen, je nachdem, wie tief man in das Thema eindringen möchte. Ferner kann eine Differenzierung zwischen Grund- und Leistungskursen gemacht werden.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe	11.–13. Klasse (Qualifikationsphase)
Dauer:	12 bis 18 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Modellieren von Raum und Zeit, Modelle inklusive ihrer Grenzen erkennen, Anwendung mathematischer Kompetenzen in der Physik, Verbindungen zwischen Geometrie, Algebra und Analysis schaffen
Thematische Bereiche:	Relativität, Raum und Zeit, Kinetik, Äther, Galilei- und Lorentz-Transformation, relativistische Dynamik, Lorentz-Kontraktion, Zeitdilatation, Zwillingsparadoxon, Masse und Energie
Medien:	Texte, Internet, CAS, GTR

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt, Tk = Tippkarte / Hilfestation

1. Stunde

Thema:	Einleitung
M 1 (Ab)	**Ereignisse**
M 2 (Ab)	**Raum-Zeit-Diagramm**
M 3 (Ab)	**Bewegungen graphisch darstellen**
M 32 (Tk)	**Tippkarten zu M 2, Aufgabe 2**

2. Stunde

Thema:	Weltlinien, Licht und Äther
M 4 (Ab)	**Weltlinien und Relativitätsprinzip**
M 5 (Ab)	**Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Experimente**
M 6 (Ab)	**Das Äthersystem**

3. Stunde

Thema:	Äthertheorie und Michelson-Morley-Experiment
M 7 (Ab)	**Relativitätsprinzip und sein Bezug zur Äthertheorie**
M 8 (Ab)	**Experimenteller Test der Äthertheorie**

4./5. Stunde

Thema:	Gleichzeitigkeit und lange Wege
M 9 (Ab)	**Gleichzeitigkeit**
M 10 (Ab)	**Weg des Lichts**
M 11 (Ab)	**Relativität der Gleichzeitigkeit**
M 32 (Tk)	**Tippkarten zu M 9, Aufgabe 1**

6./7. Stunde

Thema:	Galilei-Transformationen
M 12 (Ab)	**Galilei-Transformationen**
M 13 (Ab)	**Korrektur der Galilei-Transformationen**
M 32 (Tk)	**Tippkarte zu M 13, Aufgabe 1**

8./9. Stunde

Thema:	Lorentz-Transformation
M 14 (Ab)	**Lorentz-Transformation**
M 15 (Ab)	**Koordinatenwechsel mit Transformationen**
M 32 (Tk)	**Tippkarten zu M 14, Aufgabe 1**

10./11. Stunde

Thema:		Potentialfelder von mehr als einer Ladung
M 16	(Ab)	**Geometrische Deutung der Galilei-Transformation**
M 17	(Ab)	**Lorentz-Transformation geometrisch 1**
M 18	(Ab)	**Lorentz-Transformation geometrisch 2**
M 32	(Tk)	**Tippkarte zu M 17 und M 18**

12. Stunde

Thema:		Relativität
M 19	(Ab)	**Weltlinien von Lichtstrahlen**
M 20	(Ab)	**Relativität der Gleichzeitigkeit**
M 21	(Ab)	**Relativität der Kausalität**

13. Stunde

Thema:		Schneller als das Licht
M 22	(Ab)	**Schneller als das Licht**
M 23	(Ab)	$v + \overline{v} > c$ **?**

14./15. Stunde

Thema:		Die Lorentz-Kontraktion
M 24	(Ab)	**Die Lorentz-Kontraktion 1**
M 25	(Ab)	**Die Lorentz-Kontraktion 2**

16. Stunde

Thema:		Die Zeitdilatation
M 26	(Ab)	**Die Zeitdilatation 1**
M 27	(Ab)	**Die Zeitdilatation 2**

17. Stunde

Thema:		Das Zwillingsparadoxon
M 28	(Ab)	**Das Zwillingsparadoxon 1**
M 29	(Ab)	**Die Zwillingsparadoxon 2**

18. Stunde

Thema:		$E = mc^2$
M 30	(Ab)	**Energie und Masse**
M 31	(Ab)	**Veränderung der Masse durch Bewegung**

Ereignisse

M 1

Ausgangspunkt der Relativitätstheorie ist eine Analyse der physikalischen Messvorgänge. Zu jeder Messung braucht man ein Bezugssystem, in dem die Messung ausgeführt wird. Die einfachsten Bezugssysteme sind diejenigen, in denen das Trägheitsgesetz – erstes Newton'sches Axiom – gilt. Dieses lautet:

Jeder Körper ______________________________

______________________________,

so lange ______________________________

Bezugssysteme, in denen das Trägheitsgesetz gilt, nennt man ______________________.

Eine der einfachsten physikalischen Fragestellungen, zugleich aber eine der fundamentalsten, ist:

Wann und wo hat ein Ereignis stattgefunden?

Zur Messung von Zeiten und Orten brauchen wir Uhren, Maßstäbe und ein Bezugssystem. Das einfachste Bezugssystem besteht aus drei Maßstäben, die senkrecht aufeinander angebracht und frei durch den Raum schweben. Auch eine Reihe von Uhren muss im Bezugssystem vorhanden sein, um Zeitpunkte von Ereignissen feststellen zu können. Es bleibt aber dann die Frage:

Was genau ist ein Ereignis?

____

____

____

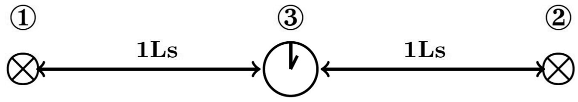
____

Durch Messung der drei Orts- und der einen Zeitkoordinate, also insgesamt vier Koordinaten, ist das Ergebnis in einem Bezugssystem eindeutig festgelegt.

Relativität der Gleichzeitigkeit

M 11

Wir können jetzt darangehen, das Raum-Zeit-Diagramm der Messanordnungen von **M 10** zu zeichnen. Die Bezeichnungen des Messsystems sind in der folgenden Abbildung zu sehen:



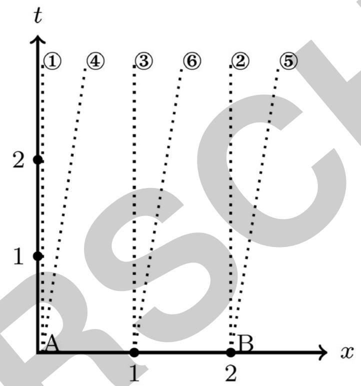
Aufgabe 1

Die beiden Lichtlampen ① und ② seien jeweils 1 Ls von der Uhr entfernt. Zeichnen Sie in ein Weg-Zeit-Diagramm die Weltlinien von Licht in diesem System.

Aufgabe 2

Betrachten wir jetzt ein zweites System, das ebenfalls aus einer Uhr und zwei Blitzlampen besteht und sich mit einer Geschwindigkeit v parallel zur Verbindung zwischen den Lampen am ersten System vorbeibewegt. In dem Augenblick, in dem das bewegte System die Position des ersten Systems erreicht, wenn also Lampe ① mit Lampe ④ und Lampe ② mit Lampe ⑤ zur Deckung kommen, werden alle vier Blitzlampen gezündet.

Das folgende Diagramm zeigt die Inertialsysteme dieser beiden Systeme.



a) Zeichnen Sie die Weltlinien der Lichtblitze ein, die von den Blitzlampen ausgehen.

b) Beschreiben Sie das Erreichen der Uhren ③ und ⑥ von den Blitzlampen aus. Diskutieren Sie diese Beobachtung in Bezug auf die Vorstellung von Gleichzeitigkeit.

Auf der Basis der Ergebnisse aus Aufgabe 2 muss man die bisherige Vorstellung von Gleichzeitigkeit verändern: Für einen Beobachter, der mit ⑥ mitfliegt, sind die Ereignisse A und B nicht gleichzeitig, da die Gleichzeitigkeit durch das simulierte Eintreffen von Lichtsignalen in der Mitte (③) definiert ist.

> Die **Gleichzeitigkeit** zweier Ereignisse, die nicht am selben Punkt stattfinden, ist vom Beobachter abhängig, also **relativ**.

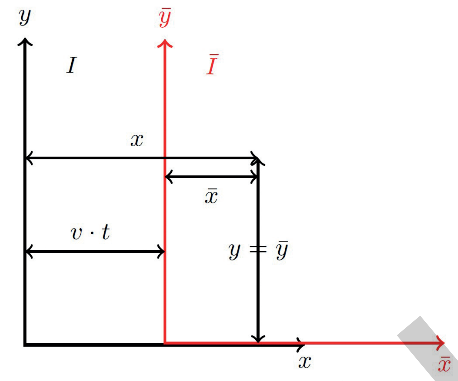
Die Zündungen der beiden Lampen ④ und ⑤ finden – von ⑥ aus betrachtet – nicht gleichzeitig statt.

Aufgabe 3

Auf Blatt **M 4** findet sich die Definition der Relativität nach Einstein. Wo findet sich dort die Relativität der Gleichzeitigkeit?

M 12 Galilei-Transformationen

In der klassischen Physik sind in Verbindung mit dem zugehörigen Relativitätsprinzip Zusammenhänge zwischen Koordinatensystemen durch Galilei-Transformationen gegeben. Versetzt man sich in zwei Inertialsystemen $I = (t;x;y;z)$ (mit physikalischen Größen x, y und z für den Raum und t für die Zeit) und $\bar{I} = (\bar{t};\bar{x};\bar{y};\bar{z})$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung zueinander bewegen, so lässt sich dies folgendermaßen darstellen:



Aus dieser Zeichnung ergeben sich die folgenden Gleichungen zu Umrechnungen zwischen den Koordinaten der Bezugssysteme:

$\bar{x} =$ ________________, $\bar{y} =$ ________________

Die Zeit ist ____________ vom Koordinatensystem.
Notiert man außerdem die Beziehungen zwischen den z-Koordinaten und der Zeit, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

Galilei-Transformationen

$$\bar{x} = x - v \cdot t$$
$$\bar{y} = y$$
$$\bar{z} = z$$
$$\bar{t} = t$$

Hier zeigt sich das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik (insbesondere durch $t = \bar{t}$).

Aufgabe 1
Zeigen Sie unter der Anwendung obiger Abbildung, dass zwischen einem Inertialsystem (1) und einem hierzu mit einer Geschwindigkeit v in positive x-Richtung bewegten Inertialsystem (2) die Galilei-Transformationen oben gelten.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Gleichungen der Galilei-Transformation dem Michelson-Morley-Versuch widersprechen.

Die Galilei-Transformationen lassen sich also nicht auf den allgemeinen Fall von Inertialsystemen übertragen.

M 14 Lorentz-Transformation

Wie auf **M 13** bemerkt, könnte eine Unterscheidung zwischen t und $\bar{t}$ sinnvoll sein. Wir müssen also noch die Beziehungen zwischen diesen beiden Größen bestimmen. Dazu greifen wir auf die Gleichung $\bar{x} = k \cdot (x - v \cdot t)$ zurück, setzen sie in Gleichung $x = k \cdot (\bar{x} + v \cdot \bar{t})$ und lösen mit einigen Rechentricks nach $\bar{t}$ auf. Insgesamt ergibt sich das folgende Ergebnis:

Lorentz-Transformation

$$\bar{x} = k \cdot (x - v \cdot t), \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = k \cdot \left(t - \frac{v \cdot x}{c^2} \right), \quad \text{mit } k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt die Zeitdilatation:

Bewegte Uhren gehen um einen Faktor

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

langsamer als ruhende Uhren. Der Effekt ist symmetrisch, von der bewegten Uhr aus gesehen geht die ursprünglich ruhende langsamer. Man spricht von einer **Zeitdilatation**.

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Gleichung des Zusammenhangs zwischen den Zeiten in den Inertialsystemen.
Ein häufig betrachtetes Beispiel für die Zeitdilatation in Verbindung mit einem überraschenden Ergebnis ist das **Zwillingsparadoxon**. Dies findet sich auf den folgenden Arbeitsblättern.

Aufgabe 2

In großer Höhe der Atmosphäre entstehen durch kosmische Strahlung Teilchen wie Myonen, sogenannte sekundäre Kosmische Strahlung. Die meisten dieser Teilchen sind nicht stabil und zerfallen nach bestimmter Zeit.

a) Informieren Sie sich beispielsweise unter *https://www.teilchenwelt.de/material/materialien-fuer-lehrkraefte/* oder *https://www.leifiphysik.de/* über Elementarteilchen und kosmische Strahlung.
b) Wie schnell müssen sich die instabilen Teilchen bewegen, um die Erdoberfläche erreichen zu können?

Aufgabe 3

Setzen Sie für v, x und k unterschiedliche Werte in die Gleichung zur Berechnung von $\bar{t}$ der Lorentz-Transformation ein. Notieren Sie die Werte in einer Tabelle. Beschreiben Sie die Abhängigkeit von $\bar{t}$ von v und x.

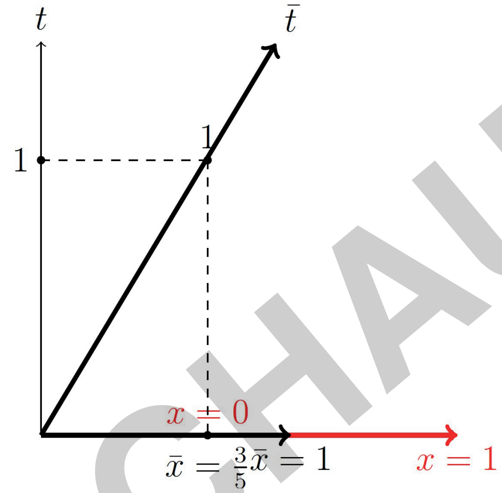
M 16 Geometrische Deutung der Galilei-Transformation

Häufig lohnt es sich, physikalische Zusammenhänge graphisch darzustellen, um Schlüsse auf geometrische Verbindungen ziehen zu können. Dies werden wir mit den Ergebnissen von **M 15** machen.

Dazu wählen wir im Folgenden die feste Geschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$.

Aufgabe 1

x und t seien in Form eines kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Erklären Sie, dass sich mithilfe des folgenden Koordinatensystems nach den Erkenntnissen der letzten Aufgaben die Transformation wiedergeben lässt.



Die Achsen von x und $\bar{x}$ scheinen zur Zeit $t = 1$ ZE um ________________________________

verschoben. Je später man den Zeitpunkt t wählt, desto mehr ist ________________________.
Die Neigung der $\bar{t}$-Achse gegenüber der t-Achse hat dementsprechend nichts mit der fehlenden Existenz einer absoluten Zeit zu tun – die es bei der Galilei-Transformation noch gibt –, sondern spiegelt einfach den Effekt der Bewegung wider.

Je schneller die Bewegung, desto mehr sind die t- und die $\bar{t}$-Achse gegeneinander

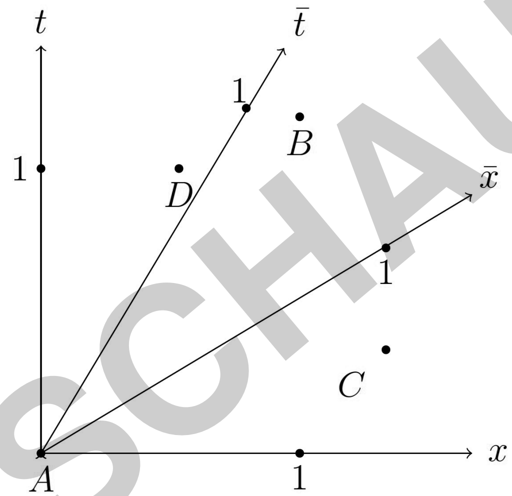
________________________________.

M 20 Relativität der Gleichzeitigkeit

Wir haben uns mit unterschiedlichen Inertialsystemen befasst und auch Transformationen zwischen ihnen betrachtet. Was wir bislang jedoch vernachlässigt haben, ist, dass sich nichts schneller als das Licht – genau genommen, wenn es eine Masse ungleich null hat, nicht einmal so schnell wie Licht – bewegen kann. Dies zeigt sich nicht zuletzt an den Ergebnissen von Blatt M 19. Also muss untersucht werden, ob sich kausale Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Inertialsystemen finden lassen. Natürlich ist dabei auch der Begriff „Gleichzeitigkeit" zu klären.

Aufgabe 1

Im folgenden Diagramm ist das System $I = (x;t)$ und das gegenüber I mit der Geschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$ bewegte System $\bar{I} = (\bar{t};\bar{x})$ eingetragen. Zusätzlich sind drei Punkte A, B, C und D eingetragen.



Bestimmen und interpretieren Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und D im Inertialsystem $\bar{I}$ und tragen Sie sie in die folgende Tabelle ein.

Ergebnis	*x*	*t*	$\bar{x}$	$\bar{t}$
A	0	0		
B	1	1,2		
C	1,2	0,4		
D	0,5	1		

Aufgabe 2

Zum Zeitpunkt $\bar{t} = 0$ finden im Inertialsystem $\bar{I}$ gleichzeitig an den Punkten $A(0|0)$ und $B(2|0)$ Ereignisse statt. Berechnen Sie die Orte und die Zeiten, an denen sie im Inertialsystem I stattfinden. Erklären Sie anhand dieser Ergebnisse folgenden Satz:

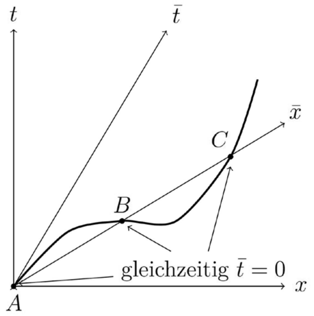
Gleichzeitigkeit ist relativ.

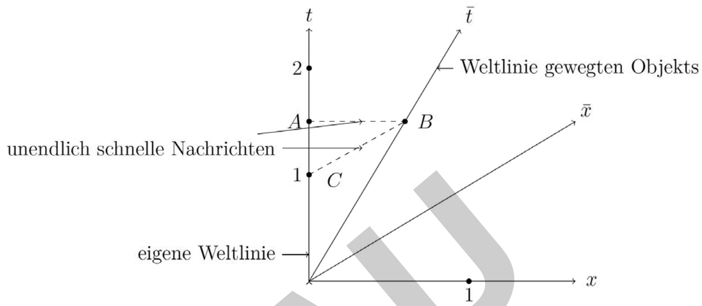
M 22 Schneller als das Licht

In *Star Wars* ist es möglich, schneller als das Licht zu fliegen, jedoch leider nicht nach der speziellen Relativitätstheorie. Erste Gedanken in diese Richtung haben wir bereits in **M 13** gemacht. Nun werden wir es uns genauer ansehen.

Aufgabe 1

Erklären Sie anhand der Skizze unten, links, dass sich ein Körper nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen kann.





Aus obigen Überlegungen ergibt sich unter anderem dies:

> Die Weltlinie der Bewegung eines Körpers muss immer einen Anstieg größer als 1 haben, um Überlichtgeschwindigkeiten auszuschließen.

Wir haben festgestellt, dass sich ein Körper nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen kann. Es könnte aber sein, dass Signale schneller als mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden können, wie es häufig in Science-Fiction-Filmen zu sein scheint. Auch dies geht leider nicht. Hierzu betrachten wir die rechte Seite der obigen Abbildung. Zum Zeitpunkt $t = \bar{t} = 0$ ZE befinden sich die Freunde ① und ② im Ursprung des Koordinatensystems. Freund ② startet dann eine Bewegung mit einer Geschwindigkeit von $v = \frac{3}{5}c$.

Aufgabe 2

Vom Punkt A wird zu entsprechendem Zeitpunkt ein Signal mit unendlicher Geschwindigkeit ausgesendet.

a) Erklären Sie, dass ein unendlich schnelles Signal im Inertialsystem $I = (t;x)$, das von ① in A ausgesandt wird, von ② im Punkt B beobachtet werden kann.

Das Signal wird an der Stelle B im Inertialsystem $\bar{I}$ von ② sofort reflektiert (wir nehmen an, dass es mit einer Verzögerung von 0 Sekunden zurückgeschickt) wird.

b) Begründen Sie, dass dieses reflektierte Signal das Inertialsystem I von Beobachter ① im Punkt C erreicht.

c) Erklären Sie, warum dieser Vorgang so nicht eintreten kann.

> Es kann kein Signal existieren, das sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt.

Die Lorentz-Kontraktion 2

M 25

Nach den Ergebnissen von **M 24** gilt:

Ein mit der Geschwindigkeit v bewegter Gegenstand erscheint um den Faktor

$$\frac{1}{k} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

in Bewegungsrichtung verkürzt.

Aufgabe 1

Ein Elektron wird im LHC des CERN möglichst stark beschleunigt. Informieren Sie sich online über CERN.

Nach *https://www.weltmaschine.de/cern_und_lhc/lhc/zahlen_und_fakten/* (Stand 12/2020) gilt:

Läuft der LHC mit Höchstleistung, rasen die Protonen 11 245 Mal pro Sekunde durch den LHC-Beschleunigerring und erreichen beinahe Lichtgeschwindigkeit.

a) Berechnen Sie, als wie lang ein Proton nach der Beschleunigung eine Bahn der Länge des LHC im eigenen Inertialsystem empfinden könnte.

b) Warum ist diese Berechnung nicht so auf die Bahn im LHC anwendbar?

Aufgabe 2

Erklären Sie am folgenden Bild, dass ein Auto, das im Inertialsystem I ruht, in $\bar{I}$ verkürzt wirken kann.